

**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID**

**ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR**

**GRADO EN INGENIERÍA MECÁNICA**



## **TRABAJO DE FIN DE GRADO**

**Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras**

**ESTUDIO DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS EXTENDIDO (XFEM) Y SU  
APLICACIÓN EN LA SIMULACIÓN DE PROPAGACIÓN DE FISURAS EN CONDICIONES  
CUASISTÁTICAS**

**AUTOR:**

Jorge Botello García

**TUTOR:**

Josué Aranda Ruiz

**DIRECTOR:**

Álvaro Olmedo Marcos

## ÍNDICE

CAPÍTULO I	Introducción.....	1
1.1	Motivación.....	1
1.2	Objetivo.....	2
1.3	Contenidos del TFG.....	2
CAPÍTULO II	Antecedentes.....	4
2.1	Introducción a la mecánica de la fractura.....	4
2.1.1	<i>Tasa de liberación de energía.....</i>	6
2.1.2	<i>Factor de intensidad de tensiones.....</i>	6
2.2	Introducción al método de los elementos finitos.....	10
2.2.1	<i>MEF en elasticidad lineal.....</i>	10
CAPÍTULO III	Método XFEM.....	14
3.1	Evolución del método.....	14
3.2	Partición de unidad.....	16
3.3	Enriquecimiento.....	16
3.3.1	<i>Funciones de enriquecimiento.....</i>	17
3.4	Integración numérica.....	20
3.5	Área de enriquecimiento.....	22
3.6	Level Set Method.....	24
3.6.1	<i>Definición del Level Set Method.....</i>	24
3.6.2	<i>Level Set para fisuras.....</i>	25
CAPÍTULO IV	Análisis de comportamiento del daño frente a modo I.....	29
4.1	Introducción.....	29
4.2	Resultados experimentales de validación.....	29
4.3	Modelo numérico.....	34
4.4	Comparación de resultados.....	41
4.4.1	<i>Comparación de velocidades medias de propagación.....</i>	42
4.4.2	<i>Comparación de velocidades instantáneas de propagación.....</i>	45

CAPÍTULO V	Análisis de comportamiento del daño frente a modo mixto.....	48
5.1	Introducción.....	48
5.2	Resultados experimentales de validación.....	48
5.3	Modelo numérico.....	54
5.4	Comparación de resultados.....	56
CAPÍTULO VI	Conclusiones y trabajos futuros.....	58
6.1	Conclusiones.....	58
6.2	Trabajos futuros.....	59
BIBLIOGRAFÍA.....		60

## ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Faro de automóvil realizado con PMMA.....	1
Figura 2 Rotura por fatiga, que se nuclea en el interior de un cilindro de laminación, a partir de una inclusión no metálica.....	5
Figura 3 Modos de fractura.....	6
Figura 4 Sistema de coordenadas polares en el extremo de fisura.....	8
Figura 5 Distribución de tensiones en el frente de fisura.....	8
Figura 6 Efecto del espesor en el factor de intensidad de tensiones.....	9
Figura 7 Discretización del modelo.....	11
Figura 8 Sistema de coordenadas polares en el extremo de fisura.....	18
Figura 9 Efecto de la función signo y de la función signo desplazada respectivamente, en las funciones de forma.....	19
Figura 10 Posibles casos de subdivisión. Subdominios de cuatro lados o triangulares.....	20
Figura 11 Transformación de los puntos de integración de una cuadratura en un triángulo.....	21
Figura 12 Generación de los nuevos subdominios tras el avance de la fisura.....	21
Figura 13 Los elementos intersecados por la fisura se dividen en cuadriláteros....	22
Figura 14 Elementos seleccionados en el enriquecimiento topológico para dos mallas con diferente tamaño de elemento h. Se indican con cuadrados los nodos enriquecidos con funciones singulares y en amarillo los elementos de transición...	23
Figura 15 Elementos seleccionados en el enriquecimiento geométrico para dos mallas con diferente tamaño de elemento h. Se indican con cuadrados los nodos enriquecidos con funciones singulares y en amarillo los elementos de transición...	23
Figura 16 Selección del enriquecimiento dependiendo de la posición del nodo respecto al frente de fisura.....	27
Figura 17 Esquema del ensayo de flexión en 3 puntos.....	29
Figura 18 Secuencia del proceso de propagación de fisura.....	31
Figura 19 Gráfica carga-desplazamiento.....	31
Figura 20 Velocidades de propagación de fisuras para diferentes longitudes de fisura inicial. a) 2 mm, b) 5 mm, c) 8 mm y d) 10 mm.....	32
Figura 21 Velocidad de propagación media de la fisura frente a las distintas velocidades de desplazamiento.....	33
Figura 22 Energía de fractura frente a la velocidad media de propagación de fisura.....	33
Figura 23 Dimensiones de la probeta y puntos de apoyo.....	35
Figura 24 La probeta (parte 1) y la fisura (parte 2) ensambladas.....	35
Figura 25 Diálogo que aparece tras crear la fisura.....	37
Figura 26 Selección del dominio de fisura (rojo) y localización de la fisura (fucsia).	38
Figura 27 Disposición de las condiciones de contorno aplicadas en la probeta.....	39
Figura 28 Mallado mediante la opción Bias.....	40
Figura 29 Cuadro de diálogo con el número de elementos y el ratio.....	40
Figura 30 Probeta de PMMA fisurada tras la simulación numérica.....	41
Figura 31 Evolución de la propagación de la fisura de forma experimental a) y de forma numérica b).....	41

Figura 32 Variación de la velocidad de propagación de fisura a lo largo del ancho de la probeta.....	42
Figura 33 Comparación de velocidades medias para una probeta de fisura inicial de 2 mm y diferentes velocidades de desplazamiento.....	43
Figura 34 Comparación de velocidades medias para una probeta de fisura inicial de 5 mm y diferentes velocidades de desplazamiento.....	43
Figura 35 Comparación de velocidades medias para una probeta de fisura inicial de 8 mm y diferentes velocidades de desplazamiento.....	44
Figura 36 Comparación de velocidades medias para una probeta de fisura inicial de 10 mm y diferentes velocidades de desplazamiento.....	44
Figura 37 Comparación de las velocidades instantáneas de propagación experimental y numérica.....	45
Figura 38 Comparación de las velocidades instantáneas de propagación experimental y numérica.....	46
Figura 39 Comparación de las velocidades instantáneas de propagación experimental y numérica.....	46
Figura 40 Realización del ensayo de Nooru-Mohamed.....	49
Figura 41 Máquina diseñada por Nooru-Mohamed para sus ensayos en modo mixto.....	49
Figura 42 Funcionamiento de la máquina.....	50
Figura 43 Aplicación esquemática de las condiciones de contorno.....	50
Figura 44 Patrones de propagación de grietas para los diferentes esfuerzos cortantes compresivos.....	51
Figura 45 Distintos modos de fallo según el tamaño de la probeta.....	52
Figura 46 Modo de fallo para probetas con longitud correspondiente a 100 milímetros.....	52
Figura 47 Afectación del valor de la carga cortante aplicada en las probetas para a) 5 kN y b) 10 kN.....	53
Figura 48 Propagación experimental de la fisura con diferentes cargas cortante aplicadas. a) 5 kN y b) 10 kN.....	53
Figura 49 Dimensiones de la probeta y la fisura.....	54
Figura 50 Probeta y fisura ensambladas. Disposición final.....	54
Figura 51 Disposición de las velocidades de desplazamiento.....	55
Figura 52 Aplicación de las velocidades en Abaqus.....	55
Figura 53 Mallado final de la probeta.....	56
Figura 54 Probeta de PMMA fisurada tras la simulación del test de Nooru-Mohamed.....	57
Figura 55 Comparación cualitativa de los resultados obtenidos. a) obtenido mediante Abaqus, b) obtenido numéricamente por Jian-Ying Wu y Shi-Lang Xu y c) obtenido experimentalmente por Jian-Ying Wu y Shi-Lang Xu.....	57

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1	Propiedades del PMMA.....	30
---------	---------------------------	----

# CAPÍTULO I

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 Motivación

A lo largo de la historia, la optimización de componentes mecánicos, tanto en sus capacidades resistivas como en la duración de la vida en servicio, ha ido cobrando cada vez más importancia a la hora de diseñar. Dicha optimización es llevada a cabo en un gran número de sectores industriales, especialmente en el aéreo y en el aeroespacial, debido a la necesidad de obtener materiales ligeros a la par que resistentes. De modo progresivo, esta optimización de diseño se ha ido extendiendo a otros sectores debido a la disminución de costes que supone.

Dicha optimización se basa principalmente en las teorías de tolerancia al daño, por lo que es importante tener un buen conocimiento acerca del material y cómo se comporta en condiciones de trabajo reales. Además, se ha de contemplar la posibilidad de que el material albergue defectos o fisuras a consecuencia de los procesos de montaje y fabricación. Estos defectos convivirán con el material durante su vida en servicio y en algunos casos podrán afectar gravemente reduciendo la vida de éste, pudiendo tener consecuencias catastróficas. Es por ello que interesa conocer cómo se fracturan los diferentes materiales frente a posibles golpes que puedan sufrir o cómo propagan las fisuras que puedan albergar.

En la actualidad, se pueden encontrar muchos tipos de polímeros en el mercado, cada uno de ellos con sus respectivas cualidades y utilizados en consecuencia, en diferentes aplicaciones. Polímeros como el policarbonato (PC) o el poliestireno (PS) son muy utilizados en el sector de la construcción como cubiertas y cerramientos. Otro tipo de polímero muy común es el polimetilmetacrilato (PMMA), que compite en cuanto a aplicaciones con los dos anteriores pero se destaca por su resistencia a la intemperie, transparencia y resistencia al rayado. Se obtiene de la polimerización del metacrilato de metilo, presentándose comúnmente en forma de gránulos. Por dichas cualidades, suele ser utilizado frecuentemente en la industria del automóvil como material para la fabricación de faros de automóviles entre otras aplicaciones.



Figura 1: Faro de automóvil realizado con PMMA [1].

Para un conocimiento a fondo de las cualidades del PMMA, lo idóneo sería trabajar de manera experimental con éste, realizando ensayos que permitan la caracterización del material para después someterlo a diversas acciones (fatiga, rotura frágil, rotura dúctil, etc). El problema principal es que este procedimiento resulta muy costoso, siendo inviable el completo estudio experimental de un material.

En busca de la optimización, se hace necesaria la combinación de estudios experimentales con la utilización de herramientas de software por ordenador, como puede ser el Método de los Elementos Finitos (MEF).

Dentro del amplio campo de soluciones que ofrece el MEF para el análisis de un material con posibles defectos, se encuentra el *Método de los Elementos Finitos Extendidos* (XFEM). Se trata de una herramienta con la que poder simular el comportamiento de los materiales cuando estos albergan algún tipo de defecto como pueda ser una fisura. Por tanto, se hace imprescindible comprender cómo funciona el XFEM y cómo aprovechar todo su potencial, de cara al estudio de los materiales.

## 1.2 Objetivo

El objetivo principal de este Trabajo de Fin de Grado es llevar a cabo un estudio del Método de los Elementos Finitos Extendidos (XFEM en adelante) y la aplicación de éste en la simulación numérica de modelos de propagación de fisuras en condiciones cuasiestáticas.

Para el logro del objetivo principal se han planteado los siguientes objetivos secundarios:

- 1- Primeramente, un estudio de las bases en las que se asienta el XFEM, siendo mostrada la evolución cronológica de dicho método y las particularidades que alberga.
- 2- Posteriormente, la simulación numérica de la propagación de fisuras para probetas de PMMA sometidas a un modo I de fractura, mediante la recreación de ensayos de flexión en 3 puntos.
- 3- Y finalmente, la simulación numérica de la propagación de fisuras para probetas de PMMA sometidas a un modo mixto de fractura.

## 1.3 Contenidos del TFG

La memoria del trabajo de fin de grado se ha dividido en 6 capítulos, siendo la introducción el primero de ellos.

En el capítulo 2 se exponen unos conocimientos previos que facilitan la comprensión de los siguientes. En concreto, se tratan dos temas. El primero de ellos es una breve introducción a la mecánica de la fractura, donde se definen conceptos tales como la tasa de liberación de energía y el factor de intensidad de tensiones. El segundo tema tiene que ver con el método de los elementos finitos (MEF), donde se realiza una breve introducción para dar a conocer en qué consiste este método.



El capítulo 3 incluye un desarrollo cronológico detallado de la evolución del método XFEM. Se introduce también, la idea de la partición de unidad y la relación que tiene con el desarrollo de las aproximaciones enriquecidas. Se expone el concepto de enriquecimiento en XFEM y el planteamiento de la formulación enriquecida de elementos finitos, así como, las funciones de enriquecimiento y el área de enriquecimiento. Por último, se da a conocer el Level Set Method.

En el capítulo 4 se ha llevado a cabo un análisis de comportamiento del daño frente a un modo I de fractura. Primeramente, se ha explicado el artículo de referencia en el que se ha basado dicho análisis, posteriormente ha sido explicada la realización del modelo numérico en Abaqus, y finalmente, se ha realizado una comparación entre los resultados numéricos y experimentales.

En el capítulo 5 se ha llevado a cabo un análisis de comportamiento del daño frente a un modo mixto de fractura. Al igual que en el capítulo anterior, se han explicado primeramente los artículos de referencia en el que se ha basado dicho análisis, posteriormente ha sido explicada la realización del modelo numérico en Abaqus, y finalmente, se ha realizado de nuevo otra comparación entre los resultados numéricos y experimentales.

El capítulo 6 se han expuesto las conclusiones finales y se han propuesto posibles líneas futuras de investigación en este campo.

Por último se ha mostrado la bibliografía utilizada para la realización del presente trabajo.

# CAPÍTULO II

## ANTECEDENTES

### 2.1 Introducción a la Mecánica de la Fractura

Hasta principios del S. XX, el diseño de componentes mecánicos y estructurales no tomaba en cuenta la posible presencia de defectos o fisuras en el seno del material. Solo se consideraba la comparación entre el estado tensional al que estaba sometido el elemento y un valor de referencia, considerado como resistencia del material (normalmente se utilizaba el límite elástico o la tensión de rotura). Además, se asumía la hipótesis de material homogéneo.

Debido a la presencia de fisuras en el componente, el fallo se podía producir por debajo de la resistencia crítica del material por lo que muchos componentes rompían antes de lo esperado.

Los primeros experimentos en la Mecánica de la Fractura se deben a Leonardo da Vinci, el cual proporcionó varias reglas que establecían los indicios de la causa del fallo. Da Vinci midió la resistencia de alambres de hierro y encontró que la resistencia variaba de forma inversa a la longitud de los alambres. Este resultado implicaba que los defectos del material gobernaban la resistencia de los alambres; un alambre más largo correspondía a un mayor volumen de material y consecuentemente a una mayor probabilidad de encontrar una zona defectuosa del alambre.

En el siglo XIX se empezaron a llevar a cabo los primeros estudios serios en el campo de la Mecánica de la Fractura. El ingeniero inglés A. A. Griffith estableció la conexión entre la fractura y el tamaño de los defectos en su primer trabajo publicado en el año 1921 [2], aplicando el análisis de tensiones a un agujero elíptico, previamente tratado por Inglis siete años antes. Griffith utiliza el Primer Principio de la Termodinámica para formular la teoría de la fractura, basada en el balance simple de energía. De acuerdo con esta teoría, una fisura se hace inestable y se produce la fractura cuando el cambio de la energía tensional que resulta de un incremento del tamaño de fisura es suficiente para superar la energía superficial del material.

Griffith estableció un modelo de buena aplicación para materiales muy frágiles como el vidrio o los materiales cerámicos, pero no pudo aplicar su teoría a los metales, ya que teniendo en cuenta que el trabajo de fractura proviene exclusivamente de la energía superficial del material, solamente se puede aplicar a sólidos idealmente frágiles. La modificación del modelo de Griffith tuvo que esperar más de 20 años para poder ser aplicada a los metales.

El nacimiento de la Mecánica de la Fractura se debe a un grupo de investigadores del Laboratorio de Investigación Naval de Washington D.C. que estudiaron el problema de la fractura en detalle. En los años 50, el Dr. G. R. Irwin lideró este grupo de investigación, que después de estudiar los trabajos previos de Griffith e Inglis et al., desarrollaron una importante labor para extender los postulados de Griffith a los metales, incluyendo la disipación de energía local por flujo plástico local.



En el año 1956, Irwin desarrolla su concepto de la tasa de liberación de energía, que se relaciona con la teoría de Griffith, pero más enfocada a resolver problemas de ingeniería. H. M. Westergaard, publicó bastantes años antes, en 1938, una técnica semi-inversa para analizar las tensiones y desplazamientos por delante de una fisura aguda. Irwin utiliza la aproximación de Westergaard para mostrar que las tensiones y desplazamientos cerca del frente de fisura pueden presentarse mediante una simple constante que está relacionada con la tasa de liberación de energía. Este interesante parámetro que caracterizaba el frente de fisura resultó ser, el que más tarde se ha conocido como el factor de intensidad de tensiones.

Como ocurre con la mayoría de las grandes ideas, la Mecánica de Fractura no fue una excepción y se produjo un cierto escepticismo y reticencias a la aceptación de sus postulados por parte de ciertos sectores, países y algunos centros de enseñanza.

En 1960, P. C. Paris y sus colaboradores encontraron una gran oposición al establecer una base para la aplicación de los principios de la Mecánica de Fractura al análisis. La oposición fue tan intensa que Paris et al. no consiguieron encontrar una revista técnica cualificada que les permitiera publicar su manuscrito, optando finalmente por su publicación en una revista periódica de la Universidad de Washington titulada *The Trend in Engineering*.



Figura 2: Rotura por fatiga, que se nuclea en el interior de un cilindro de laminación, a partir de una inclusión no metálica [3].

Tras los estudios realizados por todos los anteriores investigadores, se llega a la conclusión de que la Mecánica de la Fractura es una disciplina de la que se sabe aún poco, ya que ha sido en las últimas décadas cuando ha cobrado realmente importancia su estudio y por tanto, es preciso seguir investigando en este campo aún en desarrollo.

### 2.1.1 Tasa de liberación de energía

Irwin define el concepto de *tasa de liberación de energía*  $G$ , como la medida de la energía disponible para la propagación de una fisura en un incremento de longitud. La tasa de liberación de energía tiene dimensiones de energía por unidad de longitud de la fisura por unidad de espesor de la estructura ( $J/m^2$ ).

La condición necesaria para que una fisura propague se muestra en la ecuación (1).

$$\frac{1}{B} \frac{dU}{da} = G \geq R = \frac{1}{B} \frac{dw}{da} \quad (1)$$

donde:

- $B$  es el ancho de la pieza
- $U$  es la energía elástica
- $w$  es la energía necesaria para el crecimiento de la fisura.
- $a$  es la longitud de fisura

Se denomina  $R$  a la resistencia a la fractura y representa la energía consumida en propagar la fisura. Se puede hacer la hipótesis, como una primera aproximación, que la energía requerida para propagar es siempre la misma para cada incremento. Por tanto, podemos asumir que  $R$  es una constante y esto quiere decir que  $G$  ha de ser mayor o igual a  $R$  para que la propagación tenga lugar.

### 2.1.2 Factor de intensidad de tensiones

En un sólido fisurado pueden presentarse tres modos diferentes de fractura que dan lugar a diferentes estados tensionales. En la figura 3 se pueden ver estos tres modos de fractura.

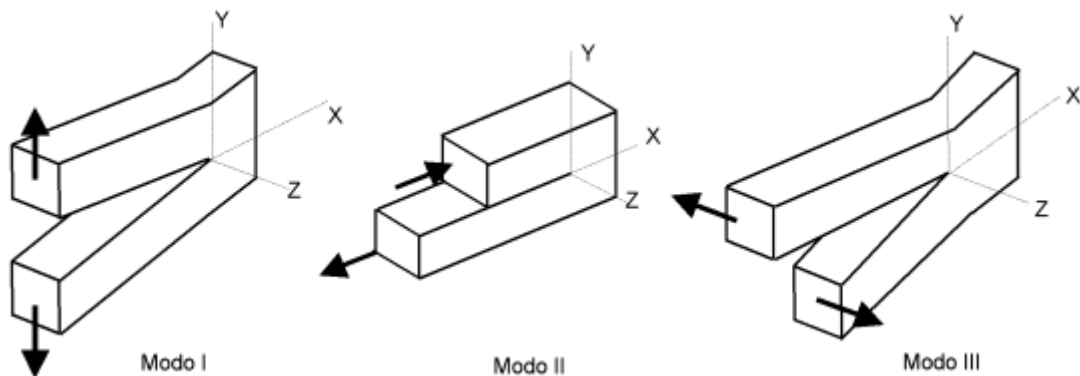


Figura 3: Modos de fractura [3]

Si la tensión normal es perpendicular al plano de la fisura, se conoce con el nombre de modo de apertura o Modo I. Cuando los desplazamientos y los esfuerzos cortantes son paralelos al plano de la fisura y con dirección en eje X (según la figura 3), se denomina Modo II o modo de cizalladura y por último, cuando los esfuerzos cortantes son paralelos al plano de la fisura pero su dirección es en el eje Z, se denomina Modo III.

La superposición de los modos explicados anteriormente describe el caso general de tensiones de un sólido. El Modo I es el más importante ya que es el modo que menos energía requiere para que la fisura propague y por tanto, toda fisura tiende a propagar en dicho modo. Es por ello que las discusiones se suelen centrar en el estudio de este modo.

Irwin obtuvo en 1951 expresiones analíticas para los distintos modos de fractura, las cuales se indican a continuación referidas al Modo I de fractura en placa plana infinita con fisura pasante:

*Modo I*

$$\sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad (2)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (4)$$

Desplazamientos:

$$u_x = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad (5)$$

$$u_y = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[k + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad (6)$$

donde:

$\mu \rightarrow$  es el módulo de cortadura  $\mu = E / (2(1 + \nu))$

$k \rightarrow$  es un valor que depende de si se está en tensión o deformación plana:

- Para TP  $\rightarrow k = 3 - 4 \nu$
- Para DP  $\rightarrow k = (3 - \nu) / (1 + \nu)$

$r$  y  $\Phi \rightarrow$  son coordenadas polares locales con origen en el extremo de fisura y alineadas con las caras de la fisura como se indica en la siguiente en la figura 4:

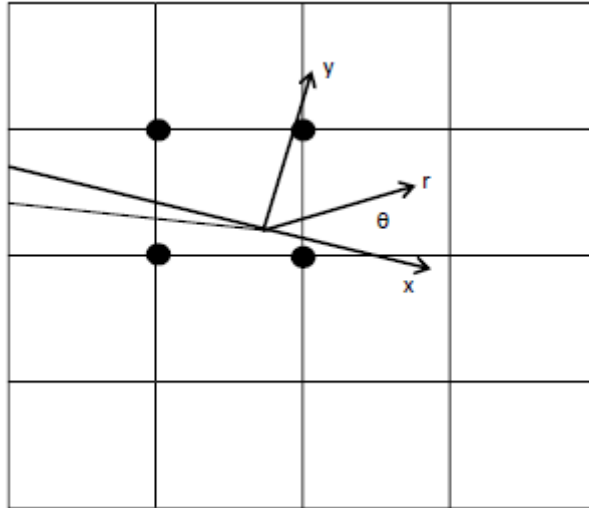


Figura 4: Sistema de coordenadas polares en el extremo de fisura [3].

El término  $K_I$  que aparece en las ecuaciones anteriores es el factor de intensidad de tensiones en modo I y depende de las cargas exteriores, de la longitud de la fisura y de la geometría. Para problemas planos, es decir, modos I y II,  $K$  es independiente de las constantes elásticas.

Todas estas expresiones de tensiones y deformaciones correspondientes a los tres modos de fractura se pueden reducir a formas sencillas del tipo:

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (7)$$

$$u_{ij} = \frac{K}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} f_i(\theta) \quad (8)$$

En la figura 5 se puede ver la distribución de las tensiones en el frente de fisura. La tensión normal al plano de la fisura  $\sigma_{yy}$  tiene una distribución asintótica al alejarse de la punta de la fisura, aproximándose al valor de la tensión remota a la cual está sometida la estructura fisurada.

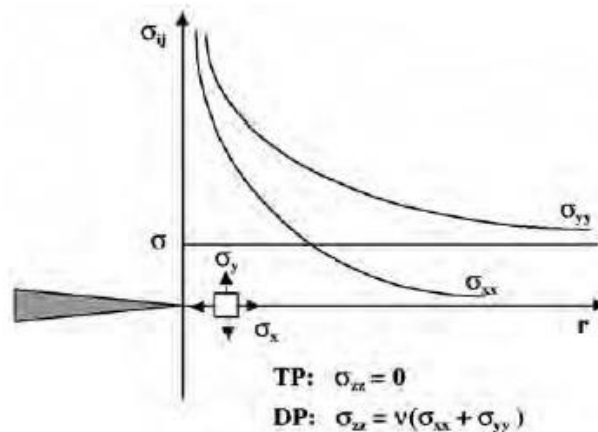


Figura 5: Distribución de tensiones en el frente de fisura [3].

Cuando en el extremo de fisura se alcanzan valores críticos de esfuerzos y deformaciones, el valor correspondiente de  $K$  pasa a definir la resistencia del material a la propagación inestable de fisuras y se denomina  $K_c$ . Este parámetro sigue siendo dependiente del material, espesor, temperatura y velocidad de sollicitación.

Sólo en el caso de probetas suficientemente gruesas como para garantizar un estado de deformación plana, el valor de  $K_c$  es independiente del espesor de la misma. Bajo estas condiciones, este parámetro pasa a ser una propiedad del material que recibe el nombre de tenacidad de fractura,  $K_{IC}$  (modo I).

El factor de intensidad de tensiones  $K$  depende de la fisura (tamaño, orientación), la probeta (geometría y dimensiones) y el modo de sollicitación, por lo que el valor de  $K$  puede variar dependiendo del caso que se tenga. Sin embargo,  $K_{IC}$  (deformación plana) es constante para cualquier configuración siempre y cuando el material involucrado sea el mismo.

La resistencia de un material a la propagación inestable de fisuras varía con el espesor de la misma. Cuando el espesor es delgado (punto B1), prevalecen condiciones de tensión plana y el material muestra valores de tenacidad elevados. Cuando se incrementa el espesor (punto B2), se encuentra en condiciones de deformación plana y por tanto a valores mínimos de tenacidad de fractura.

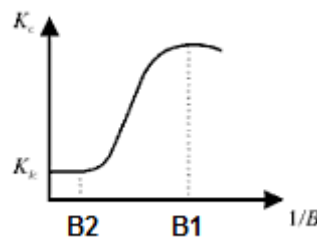


Figura 6: Efecto del espesor en el factor de intensidad de tensiones [3].

El hecho de que en deformación plana la tenacidad pase a ser independiente del espesor permite que este valor mínimo sea tomado como parámetro de diseño. Por tanto, para poder comparar la resistencia a la propagación inestable de fisuras de diferentes materiales, los valores de tenacidad se deben corresponder siempre a condiciones de deformación plana.

La utilización de espesores delgados, implica que la estructura no está bajo condiciones de deformación plana y, por tanto, la resistencia a la propagación inestable de fisuras es mucho mayor que la expresada por la tenacidad de fractura,  $K_{IC}$ .

Como resumen global de todo lo expuesto anteriormente, los factores de intensidad de tensiones sólo dependen de la geometría de la probeta, la tensión aplicada y la longitud de la fisura. Las ecuaciones anteriores sólo tienen validez cerca del frente de fisura, donde la singularidad domina el campo de tensiones. El factor de intensidad de tensiones  $K$ , define la amplitud de la singularidad de manera que cerca del extremo de fisura las tensiones crecen proporcionalmente a  $K$ , estando por lo tanto, determinadas por dicho factor de intensidad de tensiones, al igual que los desplazamientos.

## 2.2 Introducción al Método de los Elementos Finitos

El método de los elementos finitos es un método numérico para la aproximación de problemas continuos. Se basa en transformar un problema continuo en otro discreto y equivalente mediante la discretización del modelo. En otras palabras, consiste en dividir la pieza de estudio en partes más pequeñas llamadas elementos, cuyo comportamiento lo rigen un número finito de parámetros asociados a unos puntos característicos llamados nodos, y estos a su vez, son los puntos de unión de cada elemento con sus adyacentes.

El comportamiento de cada elemento viene dado por los desplazamientos de los puntos interiores del elemento los cuales se obtienen mediante las funciones de forma, a partir de los desplazamientos en los nodos.

Hay que tener en cuenta que el MEF siempre dará una solución aproximada del problema ya que dicha solución se obtiene mediante la interpolación de los valores conocidos en los nodos.

### 2.2.1 MEF en elasticidad lineal

En la mayor parte de los problemas continuos, las incógnitas son los campos de desplazamientos, de deformaciones y de tensiones. Es posible definir el problema considerando como incógnitas algunas de ellas y calculando las restantes con las ecuaciones de la teoría de la elasticidad.

Se dispone en total de 15 ecuaciones, que se reparten en seis relaciones entre tensión y deformación (ecuaciones constitutivas), seis relaciones entre desplazamientos y deformaciones (ecuaciones de compatibilidad) y tres ecuaciones de equilibrio interno. A su vez, se tienen otras 15 incógnitas; seis tensiones, seis deformaciones y tres desplazamientos.

Combinando las ecuaciones anteriores, se pueden obtener las tensiones en función de los desplazamientos y sustituyendo éstas en las ecuaciones de equilibrio, se obtiene las tres ecuaciones de equilibrio en función de las tres componentes de desplazamiento. Este enfoque conducirá a un método de elementos finitos denominado en desplazamientos. La mayor parte de los programas de elementos finitos están planteados con este método.

No hay que olvidar cumplir otros requisitos adicionales como las condiciones de contorno a las que se ve sometido nuestro problema, y más, cuando se busca la solución en desplazamientos.

Cuando se utiliza este planteamiento en desplazamientos, se debe considerar el principio de mínima energía potencial. Dicho teorema dice que los desplazamientos ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ) que satisfacen las ecuaciones diferenciales de equilibrio, así como las condiciones de contorno, dan un mínimo para la energía potencial total en comparación con cualquier otro campo de desplazamientos que satisfaga las mismas condiciones de contorno.



La operativa del método se puede dividir en tres pasos globales:

Paso 1. Dividir el problema en regiones disjuntas (elementos) conectadas entre sí mediante puntos especiales (nodos).

Paso 2. Describir la respuesta de cada elemento.

Paso 3. Describir el comportamiento del sólido completo a partir del comportamiento de cada elemento (ensamblar).

A su vez, estos pasos se subdividen en otras actividades que se detallarán a continuación.

Lo primero que se ha de hacer es discretizar el modelo. Para ello, se descompone el dominio en una unión de subdominios topológicamente regulares (elementos finitos). Los elementos pueden adquirir formas irregulares adaptándose a las particularidades geométricas del dominio original.

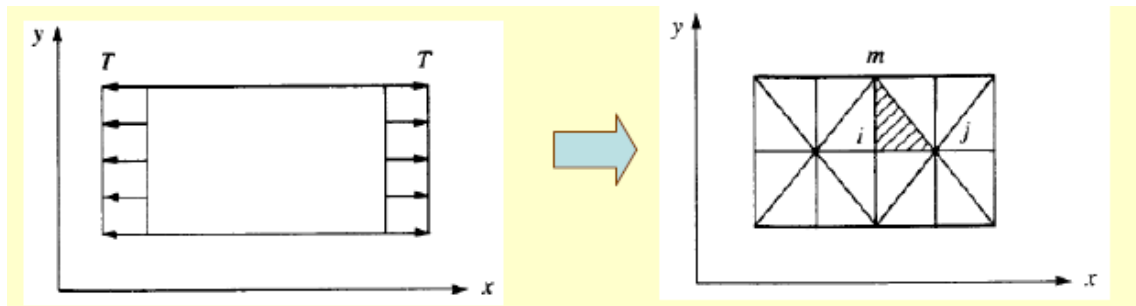


Figura 7: Discretización del modelo [4].

Posteriormente se han de definir las funciones de aproximación local. Esto consiste en asignar a cada elemento funciones de interpolación (funciones de forma), que permitan calcular las componentes del vector de desplazamiento en el interior del elemento a partir de los desplazamientos de sus nodos (ecuación 9).

$$\{u\} = [N]\{q\} \quad (9)$$

donde:

$\{u\} \rightarrow$  es el vector de los desplazamientos en el centro del elemento.

$[N] \rightarrow$  es la matriz que contiene las funciones de interpolación del elemento.

$\{q\} \rightarrow$  es el vector que contiene los desplazamientos de los nodos del elemento.

Las funciones de interpolación han de ser elegidas adecuadamente. Normalmente se eligen como funciones combinaciones de polinomios de grado uno o de grado dos.

A continuación, es necesario calcular la matriz de rigidez  $[K]$  de cada elemento ya que la ecuación que se debe satisfacer es la siguiente:

$$\{F\} = [K]\{d\} \quad (10)$$

donde:

$\{F\} \rightarrow$  es el vector de fuerzas nodales.

$[K] \rightarrow$  es la matriz de rigidez global.

$\{d\} \rightarrow$  es el vector de desplazamiento nodal.

Para calcular la matriz de rigidez  $[K]$  de cada elemento se utiliza la siguiente expresión:

$$[K] = \int [B]^T [C] [B] dV \quad (11)$$

donde:

$[C] \rightarrow$  es una matriz dependiente de las propiedades del material y diferente según se esté en el caso de tensión plana o deformación plana.

$[B] \rightarrow$  es la matriz la matriz derivada de las funciones de forma y se calcula como:

$$[B] = [L] \cdot [N] \quad (12)$$

siendo  $[L]$  la matriz de derivadas:

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{bmatrix}$$

Para un caso sencillo de un nodo, la matriz  $[B]$  quedaría de la siguiente forma:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\delta N_1}{\delta x} & 0 \\ 0 & \frac{\delta N_1}{\delta y} \\ \frac{\delta N_1}{\delta y} & \frac{\delta N_1}{\delta x} \end{bmatrix}$$

Una vez se hayan calculado las diferentes matrices de rigidez de los distintos elementos se han de ensamblar unas con otras de forma coherente para obtener la matriz de rigidez global que incluya todos los elementos del dominio.

Volviendo a la ecuación 10, se han de introducir las condiciones de contorno de nuestro problema (fuerzas en los nodos más fuerzas exteriores aplicadas en los nodos y desplazamientos). Quedará un sistema de ecuaciones en las cuales habrá como incógnitas las fuerzas en los nodos y algunos desplazamientos.

Para hallar todas estas incógnitas se ha de invertir la matriz de rigidez (ecuación 13) para poder obtener, en una primera instancia, todos los desplazamientos que fuesen aún desconocidos.

$$\{d\} = \{F\}[K]^{-1} \quad (13)$$

Una vez obtenidos todos los desplazamientos, a partir de estos y mediante las funciones de interpolación o funciones de forma, se obtienen los movimientos del sólido, el campo de deformaciones mediante las ecuaciones de compatibilidad y el campo tensional utilizando las correspondientes ecuaciones constitutivas del material.

El sistema de ecuaciones resultante puede ser de tipo lineal o no, dependiendo de aspectos tales como la consideración en el problema de grandes deformaciones, la posible no linealidad del comportamiento constitutivo de los materiales, etc.

# CAPÍTULO III

## MÉTODO XFEM

### 3.1 Evolución del método

En diversos campos de la ingeniería, el Método de los Elementos Finitos (MEF) es un método numérico consolidado, ampliamente utilizado en la resolución de problemas de contorno. No obstante, el MEF presenta algunos inconvenientes en la resolución de problemas con singularidades. Esto se debe a que la solución estándar del MEF se puede ajustar con elevada precisión a problemas cuya solución presente un campo suave, sin embargo, la solución en un problema con fisura es singular, dominada por funciones no polinómicas.

Por otro lado, con el MEF es necesario ajustar la malla a la topología de la fisura. Esto resulta un inconveniente en el estudio de crecimiento de fisuras puesto que es necesario un remallado que adapte la malla a la nueva configuración geométrica. Además, para obtener resultados precisos con el MEF en problemas con fisuras, es necesario un refinamiento local de la malla en las cercanías de la singularidad, lo cual conduce a un importante aumento de grados de libertad.

Con el fin de incrementar la velocidad de convergencia, se han realizado varios planteamientos que permitan incluir la singularidad de extremo de fisura en la formulación de los elementos. En este sentido se dirigen los trabajos de Gallager [5], Fawkes et al [6], Owen y Fawkes [7], Liebowitz y Moyer [8] y Liebowitz et al [9].

Por otro lado, Melenk y Babuška (1996) [10] consideraron la partición de la unidad en unión con el método de los elementos finitos para lograr una buena aproximación local (método PUFEM). En su momento, indicaron que el PUFEM podía ser empleado para construir métodos numéricos robustos y muy efectivos. El enfoque de la solución de PUFEM constituye la base teórica de una partición local de la unidad que más adelante se denominaría como el método extendido de los elementos finitos.

Los primeros esfuerzos en el desarrollo del Método Extendido de los Elementos Finitos se remontan al trabajo de Belytschko y Black (1999) [11], en el cual presentan una técnica de elementos finitos especialmente adecuada al modelado del crecimiento de fisuras que disminuye la necesidad de remallado de la geometría en cada etapa de crecimiento. La malla es independiente de la fisura. El método se basa en adicionar funciones de enriquecimiento discontinuas a la aproximación de elementos finitos para considerar la presencia de la fisura. Este enriquecimiento se realiza con las funciones del campo asintótico de la solución en extremo de fisura, cumpliendo la partición de la unidad (Melenk y Babuška (1996) [10]).

Poco más tarde, Moës et al. (1999) [12] realizaron mejoras en el método y lo denominaron como el Método Extendido de los Elementos Finitos (Extended Finite Element Method). La nueva adición de funciones de salto, junto con funciones de enriquecimiento de extremo de fisura, permitieron la representación de toda la discontinuidad independientemente de la malla. También desarrollaron reglas sencillas para su aplicación así como para enriquecer el extremo de fisura. Con este nuevo planteamiento no era necesario el remallado para estudiar la propagación de fisuras.

Más tarde, Daux et al. (2000) [13] introdujeron el concepto de *función ramificada* para considerar fisuras con múltiples ramas. Emplearon este método para modelar geometrías complejas como fisuras con múltiples ramas, huecos y fisuras que parten de agujeros sin necesidad de mallar las diferentes entidades geométricas.

Sukumar et al. (2000) [14] realizaron la extensión del método a problemas de fisuras planas en modo I en tres dimensiones y trabajaron sobre algunos aspectos geométricos asociados a la representación de la fisura y el enriquecimiento de la aproximación de elementos finitos.

Dolbow et al. (2001) [15] utilizaron la técnica recién desarrollada por Moës para dar solución a diferentes problemas de elasticidad en dos dimensiones y placas Mindlin-Reissner

Stroboloulis et al. [16] [17] [18] (2000) y Duarte et al. [19] (2000) plantearon el método generalizado de elementos finitos, GFEM. Su estudio trata de una formulación bastante similar a la que plantea XFEM, pero en la que incorporan las funciones especiales que reflejan información conocida *a priori* del problema. Estas funciones se combinan para formar una base usando la técnica de la partición de unidad. A causa de posibles dependencias lineales entre las distintas funciones utilizadas para construir la aproximación (las funciones de forma convencionales de elementos finitos y las funciones especiales), el GFEM puede conducir a singularidades en la matriz de rigidez. Sin embargo, esta dificultad es resuelta eficientemente con el uso de los algoritmos directos ya existentes para la resolución de sistemas de ecuaciones y con el uso de algoritmos adaptativos para la integración.

Tanto el XFEM como el GFEM tienen como punto común de partida el Método de los Elementos Finitos, ambos métodos permiten resolver problemas de ingeniería con dominios complejos que resultan prácticamente imposibles de resolver con el método de los elementos finitos.

El GFEM es capaz de proporcionar buenos resultados numéricos incluso con mallas poco refinadas. Por otro lado, el XFEM hace mayor hincapié en el enriquecimiento de nodos para modelar fisuras o inclusiones interiores de interés y presenta una mayor independencia de la solución conocida y por lo tanto mayor flexibilidad.

Resumiendo, el método de los elementos finitos enriquecido o extendido hace uso del concepto de partición de la unidad introducido por Melenk y Babuška (PUM) [10]. Este método proporciona una gran flexibilidad para elegir las funciones que definen el espacio de aproximación local. Es posible añadir funciones determinadas a la solución estándar dada por elementos finitos. En XFEM, el mallado del dominio se realiza sin tener en cuenta la existencia de fisuras o inclusiones. La singularidad se representa enriqueciendo el campo de desplazamientos de elementos finitos con funciones adicionales como por ejemplo las funciones de discontinuidad.

### 3.2 Partición de unidad

Como se ha mencionado anteriormente, el concepto de partición de unidad (PU) fue introducido por Melenk y Babuška (1996) [10]. Desarrollaron el método PUFEM (Partition Unity Finite Element Method) el cual ha sido empleado en diversas disciplinas computacionales y se trata de la base del método XFEM.

Dicho concepto establece que la suma de las funciones de interpolación (funciones de forma) de todos los nodos de un elemento, evaluadas en un punto cualquiera del mismo, proporciona como resultado la unidad:

$$\sum_i N_i(x) = 1 \quad (14)$$

Numerosos métodos como el Método de la Partición de Unidad (PUM), el método generalizado de elementos finitos, en el que se enriquece un subdominio mediante la adición de funciones especiales o el Método Extendido de Elementos Finitos (XFEM) para el modelado de propagación de fisuras, utilizan el concepto de la partición de unidad.

### 3.3 Enriquecimiento

La principal ventaja del método XFEM es que no es necesario un remallado cuando la fisura ha propagado. Además, utiliza una única malla y ésta se extiende al dominio geométrico y puede ser poco refinada. La fisura es tratada como una unidad geométrica e interacciona con la malla a través del enriquecimiento de los nodos pertenecientes a elementos intersectados por la fisura.

Como se ha dicho anteriormente, Moës et al. (1999) [12] fueron quienes propusieron el enriquecimiento de la malla mediante la adición de grados de libertad a los nodos de los elementos afectados por la fisura. De esta manera, los elementos pueden representar la discontinuidad y mejorar la representación de la singularidad del extremo de fisura.

El enriquecimiento de la aproximación de elementos finitos busca mejorar la precisión de la solución por medio de la inclusión de información conocida *a priori* de la solución analítica del problema. Por ejemplo, para la elección correcta de las funciones de forma enriquecidas es necesario el conocimiento previo de la solución. En el análisis de una fisura, por ejemplo, se debería incluir en la aproximación la solución del campo de tensiones en el frente de fisura.

Para un modelo bidimensional de elementos finitos y considerando la presencia de una fisura, la interpolación de desplazamientos para un punto de coordenadas  $X$  se realiza mediante la expresión (Moës et al. (1999) [12]):

$$u^h(x) = u^{EF} + u^{enr} = \sum_{j=1}^n N_j(x)u_j + \sum_{k=1}^m N_k(x)\psi(x)a_k \quad (15)$$

donde:

$u \rightarrow$  es el vector desplazamientos.

$a_k \rightarrow$  son grados de libertad adicionales asociados a la solución enriquecida.

$\psi \rightarrow$  es la función de enriquecimiento aplicada a los nodos de interés.

En la anterior ecuación se observa que hay dos sumandos. El primero de ellos corresponde a la solución estándar de elementos finitos, mientras que el segundo término se corresponde con el enriquecimiento de la aproximación. Este enriquecimiento añade grados de libertad a los nodos que facilitan la modelización de fisuras sin ser necesario representarlas en el modelo.

Las funciones de enriquecimiento  $\psi(x)$  deben ser capaces de representar el comportamiento singular de la solución y, evidentemente, serán diferentes en función del problema que se resuelva.

El objetivo principal en el uso de funciones de enriquecimiento es que reproduzca el campo de tensiones singular alrededor del frente de fisura, además de una continuidad de desplazamientos entre elementos y que los campos de deformación sean independientes a ambos lados de la fisura.

En el método XFEM se puede hablar de dos tipos de enriquecimiento nodal. Por una parte, el enriquecimiento de los nodos de los elementos afectados por la fisura usando para ello una función de salto o discontinuidad para tratar la discontinuidad de desplazamientos, y por otro lado, introducir en el modelo numérico una base enriquecida con las funciones del campo asintótico para representar adecuadamente este campo alrededor del extremo de fisura.

### 3.3.1 Funciones de enriquecimiento

Como se ha dicho anteriormente, el enriquecimiento de la aproximación busca mejorar la precisión de la solución mediante la incorporación de información conocida *a priori* de forma analítica. Para el caso de una fisura en problemas de MFEL esta información comprende la discontinuidad del campo a lo largo de las caras de fisura y la singularidad en el frente de ésta.

#### - Funciones de extremo de fisura

Belytschko y Black (1999) [11] propusieron enriquecer los elementos que rodean el extremo de fisura con funciones que representaran el campo asintótico cerca de la singularidad, para así poder representar el comportamiento singular que produce la presencia de una fisura en el modelo de elementos finitos.

Se incorporan localmente funciones de enriquecimiento dentro de una aproximación de elementos finitos utilizando la propiedad de partición de unidad.

Las funciones de enriquecimiento forman una base que permite representar el primer término del desarrollo del campo asintótico de desplazamientos en el extremo de fisura. Belytschko y Black (1999) [11], Stolarska et al. (2001) [20] utilizan para el caso en 2D las funciones:

$$\psi(r, \Phi) = \sqrt{r} \left( \sin \frac{\Phi}{2}, \cos \frac{\Phi}{2}, \sin \frac{\Phi}{2} \sin \frac{\Phi}{2}, \cos \frac{\Phi}{2} \sin \frac{\Phi}{2} \right) \quad (16)$$

donde:

$r$  y  $\Phi \rightarrow$  son coordenadas polares locales con origen en el extremo de fisura y alineadas con las caras de ésta como se indica en la figura 8:

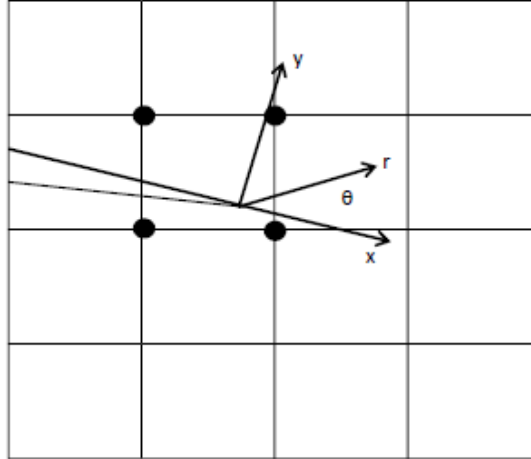


Figura 8: Sistema de coordenadas polares en el extremo de fisura [3]

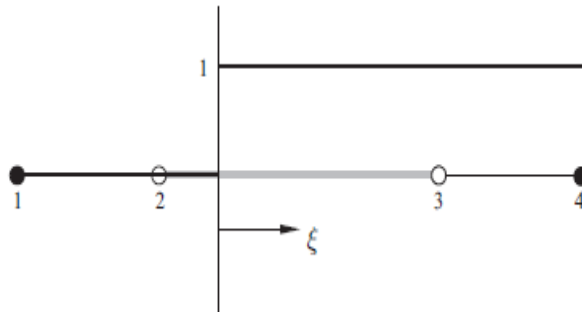
#### - Función de discontinuidad o Heaviside

Las funciones de enriquecimiento en el extremo de fisura funcionan mejor cuando se trata de fisuras cortas pero son difícilmente aplicables cuando la fisura es más larga, muy curva o incluso cuando se estudia un caso de una fisura en tres dimensiones.

Moës et al. (1999) [12] propusieron una mejora de la técnica que consistía en el enriquecimiento de los nodos que quedan más lejos del frente de fisura mediante una función escalón Heaviside, para incorporar un campo discontinuo a lo largo de las caras de la fisura.

En principio, existen diferentes formas de definir la función de Heaviside. El primer tipo posible es la función escalón definida como:

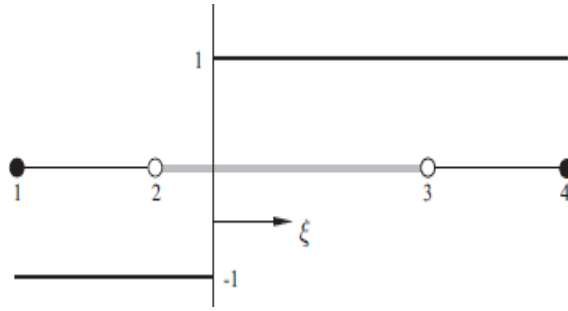
$$H(\xi) = \begin{cases} 1 & \forall \xi > 0 \\ 0 & \forall \xi < 0 \end{cases} \quad (17)$$





Un planteamiento alternativo es utilizar la función signo de Heaviside definida como:

$$H(\xi) = \begin{cases} 1 & \forall \xi > 0 \\ -1 & \forall \xi < 0 \end{cases} \quad (18)$$



Cabe destacar que la elección del tipo de función no tiene por qué afectar a la solución final de la aproximación enriquecida. La expresión para la aproximación enriquecida se puede escribir entonces como:

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x)u_j + \sum_{k=1}^m N_k(x)H(\xi)a_k \quad (19)$$

Obteniendo de la expresión anterior el valor del desplazamiento para un nodo enriquecido “i” se tiene que:

$$u^h(x_i) = u_i + H(\xi_i)a_i \quad (20)$$

El parámetro  $u_i$  no corresponde al valor real de desplazamiento del nodo “i” ya que se ve afectado por el sumando de la función Heaviside por tanto, se ha de desplazar dicha función para garantizar que se sigue cumpliendo la propiedad de función interpolante:

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x)u_j + \sum_{k=1}^m N_k(x)(H(\xi) - H(\xi_k))a_k \quad (21)$$

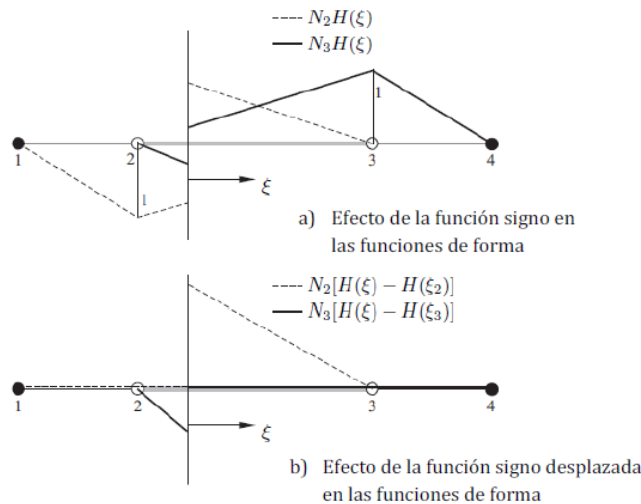


Figura 9: Efecto de la función signo y de la función signo desplazada respectivamente, en las funciones de forma [21].

En el método XFEM el enriquecimiento es aplicado a nivel local, con lo que representa una gran ventaja respecto al MEF ya que solo enriquece la zona en la que se necesita una mejor aproximación, y esto se traduce en un ahorro de tiempo y coste computacional.

### 3.4 Integración numérica

Para los elementos no enriquecidos de la aproximación XFEM, se utiliza por lo general la cuadratura de Gauss como regla de integración. Pero para los elementos enriquecidos existen dos situaciones particulares en las cuales es necesario implementar un esquema de integración más elaborado.

Por un lado, se ha de considerar la necesidad de integrar funciones discontinuas en los elementos afectados por la fisura. Por otro lado, la integración de funciones singulares cerca del extremo de fisura requiere más puntos de Gauss que la cuadratura estándar, ya que se demanda mayor precisión para integrar adecuadamente.

Para el caso de elementos afectados por la fisura, y por lo tanto, enriquecidos con la función discontinua de Heaviside  $H(x)$ , la integral de la matriz de rigidez en el elemento comprende funciones discontinuas que no son integrables con una regla de integración estándar. En estos casos, no considerar la presencia de la discontinuidad puede conllevar malos resultados numéricos.

Con el fin de integrar adecuadamente la matriz de rigidez a ambos lados de la fisura en los elementos afectados por la misma, Moës et al. (1999) [12] descomponen los elementos divididos por la fisura en subdominios con sus fronteras alineadas con la fisura. De esta manera, se garantiza que en los subdominios de integración no existe ninguna discontinuidad. Los subdominios de integración son necesarios únicamente para la integración numérica y no asocian consigo grados de libertad adicionales.

En general, la definición de los subdominios se realiza mediante la subdivisión en triángulos de los subdominios generados por la intersección de la fisura con el elemento. No obstante, es posible integrar usando cuadraturas para cuadriláteros cuando el resultado de la intersección son polígonos de cuatro lados. Existen dos posibles casos de subdivisión en elementos intersecados. En la figura 10 se muestran:

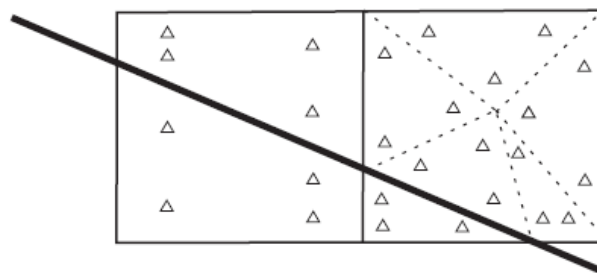


Figura 10: Posibles casos de subdivisión. Subdominios de cuatro lados o triangulares [21].

En el lado izquierdo se observa un elemento con subdominios de cuatro lados integrados con una cuadratura de  $2 \times 2$  puntos de Gauss, mientras que en el lado derecho se muestra un elemento con subdominios triangulares y una cuadratura de tres puntos de Gauss en cada uno de ellos.

Para elementos que se encuentran cerca del extremo de fisura y que están afectados por funciones singulares, Laborde et al. (2005) [22] comprobaron que al expresar las integrales de los subdominios en coordenadas polares se cancelaba la singularidad de  $1/\sqrt{r}$ , proponiendo posteriormente la técnica de integración que ellos denominaron *casi-polar*. Esta técnica consiste en utilizar los puntos de integración de una cuadratura estándar de un cuadrilátero transformado en un triángulo, colapsando dos vértices contiguos en el punto singular.

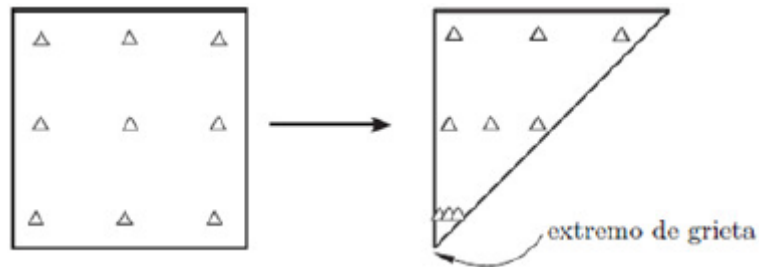


Figura 11: Transformación de los puntos de integración de una cuadratura en un triángulo [21].

Aunque la técnica de triangulación de los subdominios para evaluar las integrales de la matriz de rigidez de los elementos enriquecidos es ciertamente efectiva, puede no ser la más práctica para problemas donde las leyes para los materiales son no lineales (como por ejemplo en plasticidad) y dependen del historial de carga, siendo así que la generación de nuevos subdominios a medida que la fisura se propaga representa dificultades adicionales al problema.

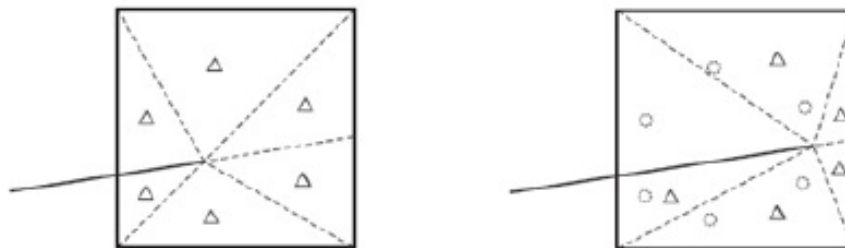


Figura 12: Generación de los nuevos subdominios tras el avance de la fisura [21].

La disposición de los puntos de integración en el elemento de extremo de fisura cambia cuando la fisura propaga. Este cambio de posición afecta los datos históricos para los problemas plásticos ya que los puntos de evaluación cambian.

Elguedj et al. (2006) [23] abordan el modelado de problemas no lineales utilizando un esquema de subdivisión que no requiere generar nuevos subdominios en la propagación, donde los elementos intersecados por la fisura se dividen en cuadriláteros como se observa en la figura 12.

Un esquema de integración semejante se plantea en Dolbow (1999) [24]. Aunque esta formulación es más exigente que la definición de triángulos y, en general, requiera un número mayor de puntos de integración para obtener la misma precisión, resulta más flexible para los casos en los cuales la fisura se propaga en materiales no lineales.

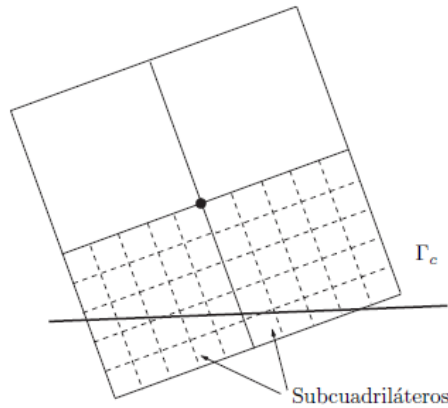


Figura 13: Los elementos intersecados por la fisura se dividen en cuadriláteros [21].

### 3.5 Área de enriquecimiento

Para problemas con solución suave la velocidad de convergencia teórica de la norma energética del error para el caso de refinamiento uniforme es del orden  $O(h^p)$ , donde “p” es el grado del polinomio de la interpolación usada en los desplazamientos y h corresponde al tamaño del elemento. Cuando la solución es singular, la velocidad de convergencia es menor ya que está afectada por la intensidad de la singularidad  $\lambda$ .

$$O(h^{\min(\lambda, p)})$$

En la MFEL para una fisura se sabe que  $\lambda = 1/2$ , con lo que la velocidad de convergencia de la norma energética del error disminuye a 0.5. La versión clásica del XFEM no mejora la convergencia de una aproximación de elementos finitos convencional. El orden se mantiene en  $O(h^{1/2})$  debido a que la solución es singular, aunque el nivel de error en norma energética es mucho menor que en una formulación de MEF.

Strang y Fix (1973) [25] demostraron que la convergencia de problemas singulares con refinamiento uniforme mejoraba con el uso de elementos singulares, por lo que de alguna manera es posible esperar un mejor comportamiento de la velocidad de convergencia en problemas resueltos mediante XFEM.

Melenk y Babuška (1996) [10] hacen mención a este mismo comportamiento como una propiedad de los métodos PUM, indicando que el uso de funciones escogidas específicamente para cada tipo de problema proporciona velocidades de convergencia óptimas (se considera que la velocidad óptima es la obtenida para problemas con soluciones suaves).

Laborde et al. (2005) [22], Bechet et al. (2005) [26] encontraron que, con el fin de lograr una mayor velocidad de convergencia de la norma energética del error en XFEM, el dominio enriquecido con funciones singulares alrededor del extremo de fisura debe ser independiente del tamaño de elemento h. El esquema de enriquecimiento usado normalmente en la formulación clásica de XFEM, denominado por los autores como enriquecimiento topológico, consiste en enriquecer solo los nodos de los elementos que contienen el extremo de fisura, como se muestra en la figura 14.

Extremo de fisura

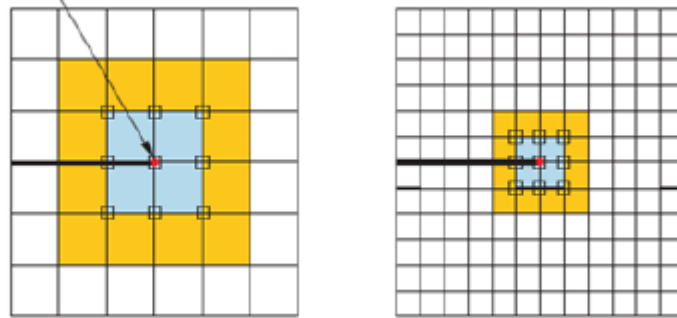


Figura 14: Elementos seleccionados en el enriquecimiento topológico para dos mallas con diferente tamaño de elemento  $h$ . Se indican con cuadrados los nodos enriquecidos con funciones singulares y en amarillo los elementos de transición [21].

Consecuentemente, el soporte de las funciones de enriquecimiento disminuye a medida que el tamaño de elemento  $h$  tiende a cero. Más aun, el enriquecimiento topológico ha demostrado problemas de precisión ya que la solución en los alrededores de la singularidad se ve influenciada por la posición del extremo de fisura dentro del elemento, o por la proximidad de la zona de transición (zona en la que los elementos son enriquecidos de manera parcial).

Una alternativa, denominada enriquecimiento geométrico, consiste en enriquecer un área fija alrededor del extremo de fisura independiente del tamaño de elemento  $h$ .

Laborde et al (2005) [22] y Bechet et al. (2005) [26] indican que usando refinamientos uniformes junto con enriquecimiento geométrico en XFEM, se consigue la velocidad de convergencia óptima de MEF con refinamientos  $h$ -adaptativos para problemas singulares.

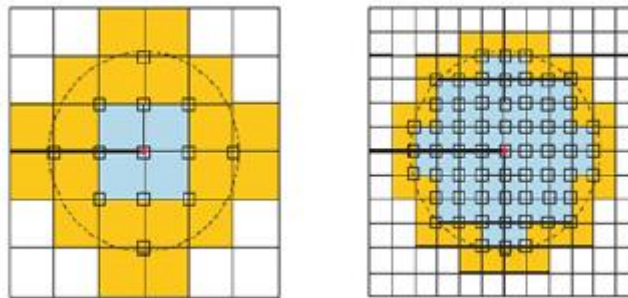


Figura 15: Elementos seleccionados en el enriquecimiento geométrico para dos mallas con diferente tamaño de elemento  $h$ . Se indican con cuadrados los nodos enriquecidos con funciones singulares y en amarillo los elementos de transición [21].

Aunque el enriquecimiento de un área fija mejora considerablemente los resultados, es necesario resaltar que dicho esquema implica que el número de condicionamiento de las matrices de rigidez aumenta con el número de nodos enriquecidos con funciones singulares, por lo que el sistema de ecuaciones lineales puede presentar problemas de mal condicionamiento numérico.

Por otra parte, las diferencias entre velocidades de convergencia teóricas y las obtenidas mediante XFEM presentadas por Laborde et al. (2005) [22] están asociadas a problemas en las zonas de transición.

En el mismo trabajo, Laborde propone dos técnicas que buscan mejorar el condicionamiento numérico y la velocidad de convergencia. La primera, llamada XFEM-d.g. acopla los grados de libertad de las funciones singulares en la zona enriquecida reduciendo drásticamente el mal condicionamiento numérico. De esta manera, mientras que la formulación convencional de XFEM añade ocho grados de libertad por cada nodo enriquecido con funciones de extremo de fisura en un problema bidimensional, con esta técnica se aumenta el número de grados de libertad solo en ocho para toda el área fija, independientemente del radio de enriquecimiento, con el inconveniente de que también se reduce la velocidad de convergencia óptima por problemas en la zona de transición.

### 3.6 Level Set Method

Un aspecto importante en la propagación de la fisura es el seguimiento de las zonas de transición. La mayoría de técnicas convencionales colocan marcadores en el frente de fisura para seguir la evolución de la interfase. Sin embargo, estas técnicas tienden a ser inestables con frentes de gran curvatura. La razón puede ser atribuida al hecho de que un error pequeño al determinar la posición puede llegar a producir grandes errores en la evaluación de la curvatura.

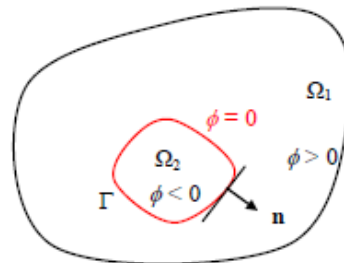
El Level Set Method (LSM) nace como un método alternativo para el seguimiento de las interfases, y aunque no es obligatorio su uso en XFEM, la mayoría de programas lo llevan implementado. En el LSM, la interfase se representa como el level set cero de una función implícita  $\Phi(x)$ , cuya dimensión es un grado mayor que la dimensión de la interfase. La ecuación de la evolución de la interfase puede expresarse como una función de la evolución de  $\Phi$ .

Existen numerosas ventajas en el LSM. En primer lugar, el movimiento de la fisura se calcula en una malla fija, sin necesidad de crear una nueva malla cada vez que la fisura avanza. En segundo lugar, el método tiene en cuenta de manera implícita los cambios en la topología de la interfaz. Además, puede extenderse a órdenes mayores y las propiedades de la interfaz se pueden obtener fácilmente de la función  $\Phi$ . La principal desventaja es que necesita una función de un orden mayor que la fisura original, lo que conlleva un coste computacional adicional.

#### 3.6.1 Definición del Level Set Method

Si consideramos un dominio  $\Omega$  dividido en dos subdominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  compartiendo una interfase  $\Gamma$ , la función level set se define como:

$$\phi(x) = \begin{cases} > 0 & x \in \Omega_1 \\ = 0 & x \in \Gamma \\ < 0 & x \in \Omega_2 \end{cases} \quad (22)$$



La interfase  $\Gamma$  puede ser considerada como el nivel cero de la función level set  $\phi(x)$ . La función level set no es conocida *a priori*. Se define la función escalar, como la distancia a la curva  $\Gamma(0)$ :

$$\phi(x) = \begin{cases} d & x \in \Omega_1 \\ -d & x \in \Omega_2 \end{cases} \quad (23)$$

donde  $d$  es la distancia normal desde un punto  $x$  a la curva  $\Gamma$ . Utilizando la definición de la función de Heaviside:

$$H(\xi) = \begin{cases} 1 & \forall \xi > 0 \\ 0 & \forall \xi < 0 \end{cases} \quad (24)$$

Se definen los dominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  como:

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega, H(\phi(x)) = 1\} \quad (25)$$

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega, H(\phi(x)) = 0\} \quad (26)$$

Reformulándolo de manera más apropiada:

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega, H(\phi(x)) = 1\} \quad (27)$$

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega, H(-\phi(x)) = -1\} \quad (28)$$

La utilización de las funciones level set permite la evaluación del level set basándose en los valores nodales y en las funciones de forma:

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^n N_j(x) \phi_j \quad (29)$$

Este concepto es muy importante en la práctica, puesto que con ello se consigue definir implícitamente la función level set para todo el componente.

### 6.3.2 Level Set para fisuras

El movimiento de la interfase se modela mediante la ecuación de integración de Hamilton-Jacobi:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \phi(x, t) \cdot v(x, t) = 0 \quad (30)$$

donde  $v$  es la velocidad de la interfaz. La ecuación anterior se puede escribir de manera más general utilizando la integración en el tiempo en  $\Delta t$ :

$$\phi^{n+1} = \phi^n - \Delta t \phi_i^n v_i^n \quad (31)$$

Esta formulación para la evolución de una interfase no resulta apropiada para modelar la propagación de fisuras, ya que en estos casos la función del campo de velocidades no es conocida *a priori*.



Por tanto, es necesaria la evolución de esta técnica hacia otras en las que la definición de los nodos enriquecidos se actualiza de manera sencilla a medida que la fisura se propaga (Stolarska et al. 2001 [20]).

Considérese el dominio  $\Omega$  que contiene una fisura interior definida por el contorno  $\Gamma_c$ . La fisura presenta en este caso dos extremos  $x_i$   $i=[1,2]$ . Para representar la fisura mediante level sets, en primer lugar, se define para todo el dominio  $\Omega$  la función de distancia  $(x,0)$ , que denota la distancia de un punto  $x$  hasta la fisura  $\Gamma_c$ :

$$\phi(x) = \begin{cases} \min_{x_{\Gamma_c} \in \Gamma_c} \|x - x_{\Gamma_c}\| & \text{si } e_n \cdot (x - x_{\Gamma_c}) \geq 0 \\ -\min_{x_{\Gamma_c} \in \Gamma_c} \|x - x_{\Gamma_c}\| & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (32)$$

donde el signo de la función depende del lado de la interfase sobre la cual se encuentra el punto  $x$ . La función definida anteriormente describe el problema de una curva cerrada en el plano. Para modelar una curva abierta es necesario ampliar el modelo de level set utilizando más de una función de distancia.

Para fisuras que presenten uno o más extremos, la fisura se representa como el level set cero de una función  $\phi(x,t)$ , y cada extremo  $i$  es descrito como la intersección de  $\phi(x,t)$  con otra función level set  $\psi_i(x,t)$ , ortogonal a en el extremo de fisura  $i$ . La función  $\psi_i(x)$  se escribe entonces como:

$$\psi_i(x) = (x - x_i) \cdot e_s \quad (33)$$

Siendo  $e_s$  el vector unitario tangente a la fisura en el extremo  $x_i$ . En el caso de una fisura interior con dos extremos son necesarias dos funciones  $\psi_1$  y  $\psi_2$ , una para cada extremo. Para una fisura en el borde del dominio, con un solo extremo es necesaria una única función  $\psi_1$ . (Stolarska et al. (2001) [20], Ventura et al. (2002) [27], Moës et al. (2002) [28]).

El valor de las funciones level set solo es conocido en los nodos, y se evalúa en todo el dominio interpolando con las funciones de forma de elementos finitos:

$$\phi(x, t) = \sum_{j=1}^n N_j(x) (\phi^k(x, t))_j \quad (34)$$

$$\psi(x, t) = \sum N_j(x) \psi_j(x, t) \quad (35)$$

Una vez se han definido las funciones de level set necesarias para representar la discontinuidad, se pueden utilizar dichas funciones para definir el tipo de enriquecimiento nodal. El enriquecimiento se realiza en los nodos cuyo soporte nodal se intersecta completamente con la fisura. Los nodos cuyo soporte contiene alguno de los extremos de la fisura son enriquecidos con las funciones que representan los campos asintóticos bidimensionales en el extremo de fisura. Para determinar la posición de un punto  $x$  relativo a la fisura, es suficiente saber el valor de  $\phi$  en dicho punto. Si  $(x)<0$ ,  $x$  está situado a un lado de la fisura. Si  $(x)>0$ ,  $x$  está situado en el lado contrario.



Como resultado, se pueden plantear un conjunto de expresiones en función de las funciones de level set que permitan identificar el tipo de enriquecimiento a utilizar en los nodos de un determinado elemento, dependiendo de si está localizado en el frente de fisura o el elemento está dividido por la fisura:

- Elemento dividido por la fisura:

Para un elemento dado, sean  $\phi_{min}$  y  $\phi_{max}$  los valores máximo y mínimo de la función  $\phi$  en los nodos del elemento y  $\psi_{min}$  y  $\psi_{max}$  los valor máximo y mínimo de  $\psi$ . Si para el elemento se cumple que la función, toma valores negativos y positivos, y además, todos los valores de  $\psi$  son negativos, el elemento estará dividido por la fisura y sus nodos se han de enriquecer con funciones de Heaviside.

- Extremo de fisura:

De manera similar, si para un elemento se cumple que las dos funciones de level sets  $\psi$  y  $\phi$  toman cada una valores negativos y positivos, el elemento contiene el extremo de fisura y sus nodos han de ser enriquecidos con funciones de extremo de fisura.

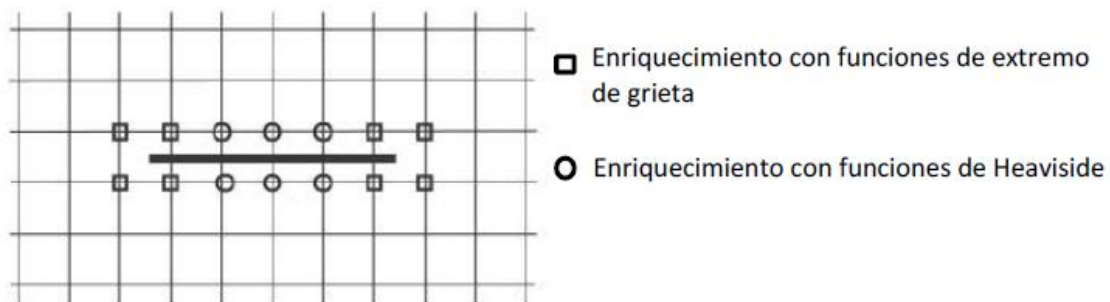


Figura 16: Selección del enriquecimiento dependiendo de la posición del nodo respecto al frente de fisura [21].

Es posible evaluar los puntos de intersección de la fisura con los elementos usando los valores nodales de las funciones, lo cual puede ser muy útil para definir los subdominios utilizados en la integración numérica. Así, por ejemplo, en un elemento intersectado con la fisura en el lado definido por los nodos “i” y “j”, las coordenadas del punto de intersección  $X_p$  en dicho lado se evalúan mediante la expresión:

$$x_p = x_i - \frac{\phi(x_i)}{\phi(x_j) - \phi(x_i)}(x_j - x_i) \quad (36)$$

Si se quiere evaluar la dirección y magnitud del crecimiento de la fisura en los puntos a lo largo el frente de fisura es suficiente con conocer los valores del Factor de Intensidad de Tensiones (FIT). Sin embargo, para poder actualizar las funciones de level sets es necesario conocer la información del campo de velocidades en todas las partes del dominio donde están definidas dichas funciones y no solo en el frente de fisura. Por lo tanto, para aplicar una técnica de level sets a problemas de propagación de fisuras es necesario extender el campo de velocidades a todo el dominio de las funciones de level sets, y además, es necesario asegurar que la actualización de las funciones no modifique la superficie de fisura ya generada.

El algoritmo propuesto por Gravouil et al. (2002) [29] para modelar la propagación de una fisura:

1. Extensión ortogonal de la función  $\phi$  en el subdominio de las funciones level set definido por  $\psi > 0$ .
2. Extensión de las componentes del campo de velocidad en el sistema ortogonal definido por  $y$  y  $\psi$ .
3. Ajustar la componente del campo de velocidad en la dirección, para evitar modificaciones de la fisura generada hasta ese momento.
4. Actualizar y reinicializar la función.
5. Actualizar la función  $\psi$ .
6. Ortogonalizar y reinicializar la función  $\psi$ .

# CAPÍTULO IV

## ANÁLISIS DE COMPORTAMIENTO DEL DAÑO FRENTE A MODO I

### 4.1 Introducción

Este capítulo se centra en el análisis del comportamiento del daño frente a un modo I de fractura en las probetas de PMMA. Para la realización de dicho análisis, el capítulo ha sido dividido en 3 apartados.

Primeramente, se ha llevado a cabo un estudio del artículo de J.A. Loya et al. [30] mostrando qué procedimiento seguían sus autores en sus ensayos experimentales y los resultados que obtenían tras la realización de estos.

Posteriormente, ha sido mostrado el procedimiento de la creación del modelo numérico en el código comercial de elementos finitos Abaqus y especialmente, la implementación de XFEM en dicho modelo.

Finalmente, ha sido llevada a cabo una comparación entre los resultados obtenidos experimental y numéricamente con la finalidad de dar por válido el modelo numérico y por ende, las propiedades que definen al PMMA

### 4.2 Resultados experimentales de validación

El artículo anteriormente mencionado en la introducción, es el realizado por J.A. Loya et al. [30]. Lo que lograron los autores en su artículo es entender y predecir el camino seguido por una fisura y la velocidad de propagación de ésta durante el proceso. Para ello realizaron ensayos de flexión en tres puntos (figura 17) con probetas de polimetilmetacrilato (PMMA) las cuales albergaban diferentes tamaños de fisura inicial y fueron ensayadas con velocidades de desplazamiento distintas.

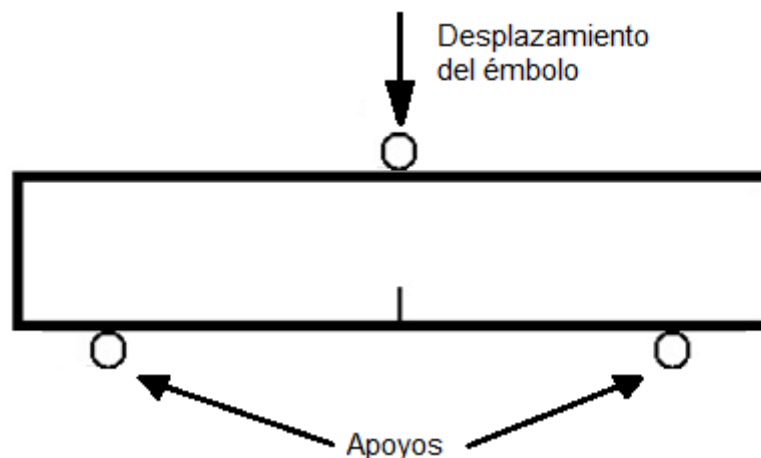


Figura 17: Esquema del ensayo de flexión en 3 puntos.

Mediante el empleo de una cámara de alta velocidad, se pudo analizar el proceso de propagación de fisura de los diversos casos pudiéndose así determinar las velocidades instantáneas de propagación y las velocidades medias del ensayo.

Este artículo ha sido de gran interés dado que la velocidad de propagación de fisuras en polímeros no había sido medida hasta el momento a través de ensayos de flexión en tres puntos, siendo uno de los más utilizados para determinar las propiedades de fractura de los materiales.

## Proceso

El material de las probetas fue considerado en dicho artículo como cuasi-frágil y con comportamiento elástico-lineal, lo cual es cierto para las condiciones del ensayo considerado. Para obtener algunas propiedades del material como el módulo de Young, el límite elástico y la tensión de rotura, fue realizado un ensayo de tracción simple a una probeta del mismo material (PMMA) sin fisura con una velocidad de desplazamiento constante de 0.25 mm/min.

Para obtener el  $K_{IC}$  del material se realizó un ensayo de flexión en tres puntos a una probeta cuya fisura inicial era de 8.5 mm.

E(MPa)	$\sigma_{0.2}$ (MPa)	$\sigma_u$ (MPa)	$K_{IC}$ (MPa·m <sup>0.5</sup> )	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$\mu$ (poisson)
2870	27.1	47.8	1.05	1170-1200	0.35-0.40

Tabla 1: Propiedades del PMMA. [30]

Otras propiedades necesarias como el coeficiente de Poisson y la densidad no vienen reflejadas en dicho artículo, por lo que han sido obtenidas de la bibliografía.

La densidad del PMMA varía en torno a 1170-1200 Kg/m<sup>3</sup> y ha quedado establecida como 1180 Kg/m<sup>3</sup>. Por otra parte, el coeficiente de Poisson para el mismo material suele adquirir valores entre 0.35-0.40 y ha quedado establecido en 0.37.

Las diferentes longitudes iniciales de fisura de cada una de las probetas eran de 2, 5, 8 y 10 mm mientras que las velocidades de desplazamiento adquirirían los valores de 0.25, 0.5, 2 y 5 mm/min.

Las longitudes iniciales de fisura fueron obtenidas mediante una máquina de fatiga por resonancia.

Para la obtención de la velocidad de propagación de fisura fue utilizada la siguiente expresión:

$$\dot{a}(t) = \frac{\bar{a}(t + \Delta T) - \bar{a}(t - \Delta T)}{2\Delta t} \quad (37)$$

Mediante el empleo de la cámara de alta velocidad fue posible obtener las longitudes de fisura para dos instantes de tiempo y con ello la velocidad de propagación para ese tramo (figura 18).

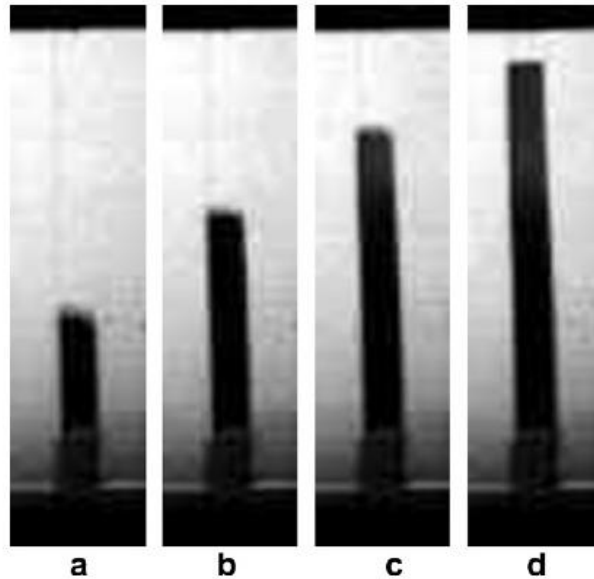


Figura 18: Secuencia del proceso de propagación de fisura [30].

Otro parámetro importante a obtener fue la energía de fractura  $G_c$  (energía disponible para la propagación de fisura). Este parámetro influye en gran medida en la velocidad de propagación de la fisura y fue obtenido mediante la gráfica de la figura 19. Dicha gráfica representa la curva de carga-desplazamiento del émbolo, así como la carga máxima alcanzada. Considerando que la propagación de la fisura inicia cuando la carga es máxima, se puede obtener un valor de  $G_c$  a partir del área bajo la curva.

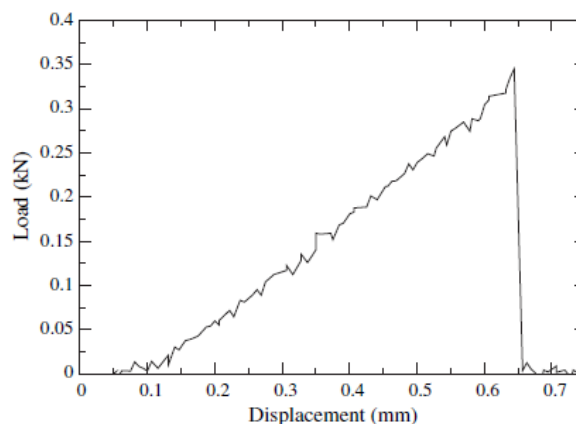


Figura 19: Gráfica carga-desplazamiento [30].

La expresión utilizada para la obtención de la energía de fractura “ $G_c$ ” se muestra a continuación:

$$G_c = \frac{2A}{B(W - a_0)} \quad (38)$$

donde:

$A \rightarrow$  es el área bajo la curva de la figura 19.

$B \rightarrow$  es el ancho de la probeta.

$W \rightarrow$  es la altura de la probeta.

$a_0 \rightarrow$  es la longitud de fisura inicial.

## Resultados

Los resultados que obtuvieron fueron recogidos gráficamente mostrando la velocidad de propagación de fisura instantánea frente a la evolución de la longitud de la misma. Estas gráficas reflejan que la velocidad de propagación de fisura es menor a medida que la longitud de fisura inicial es mayor. Además, para el caso de fisura inicial de 10 mm, se observa como existen cambios bruscos en la velocidad de propagación a lo largo del proceso, llegando a ser prácticamente nula en alguno de los puntos.

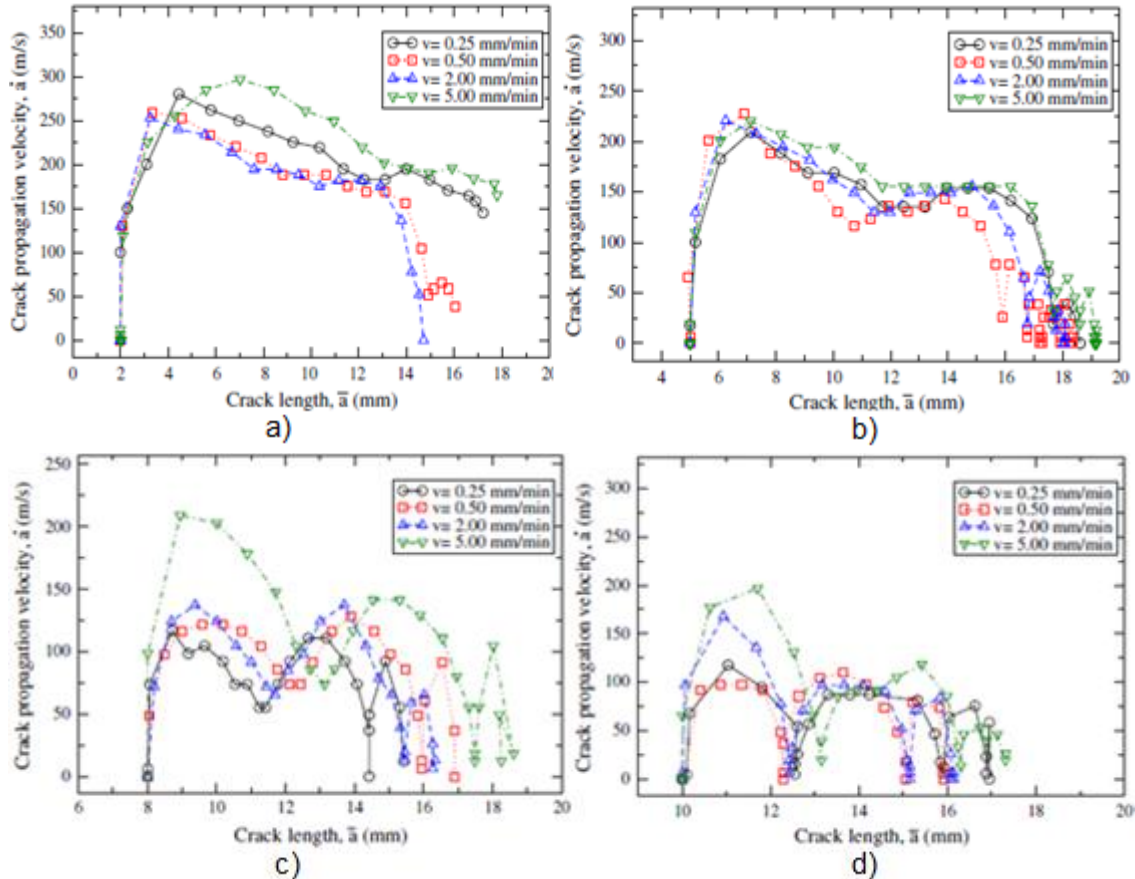


Figura 20: Velocidades de propagación de fisuras para diferentes longitudes de fisura inicial. a) 2 mm, b) 5 mm, c) 8 mm y d) 10 mm. [30]

Para cada ensayo, fue calculada una velocidad de propagación de fisura media mediante la siguiente expresión:

$$\bar{v} = \frac{a_f - a_0}{t_f - t_0} \quad (39)$$

donde

$a_0 \rightarrow$  corresponde con la longitud de fisura inicial.

$a_f \rightarrow$  es la longitud de fisura alcanzada durante el ensayo.

$t_f$  y  $t_0 \rightarrow$  los tiempos correspondientes.

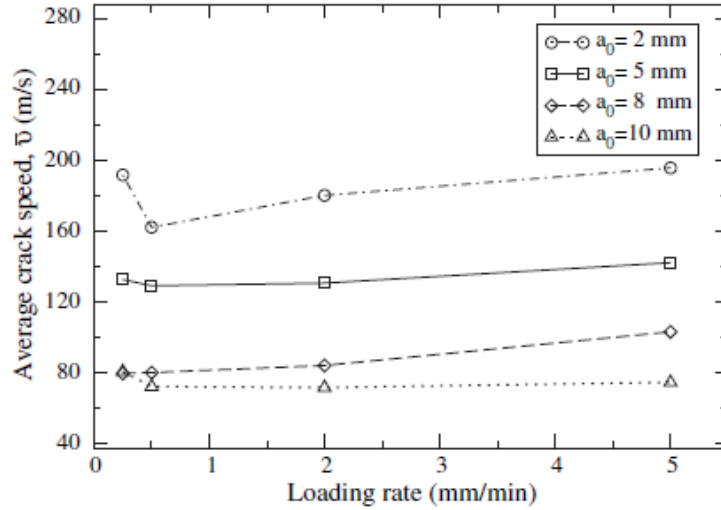


Figura 21: Velocidad de propagación media de la fisura frente a las distintas velocidades de desplazamiento [30].

La figura 21 muestra la velocidad de propagación media obtenida para cada uno de los 16 ensayos existentes. Se observa cómo las distintas velocidades de desplazamiento apenas producen variaciones en la velocidad de propagación media, exceptuando la probeta con longitud de fisura inicial de 2 milímetros y velocidad de desplazamiento de 0.5 mm/min que respecto a su grupo de probetas, sí que varía notablemente su velocidad media de propagación de fisura.

En la figura 22 se muestran los datos experimentales obtenidos para la energía de fractura  $G_c$ , frente a la velocidad media de propagación de fisura.

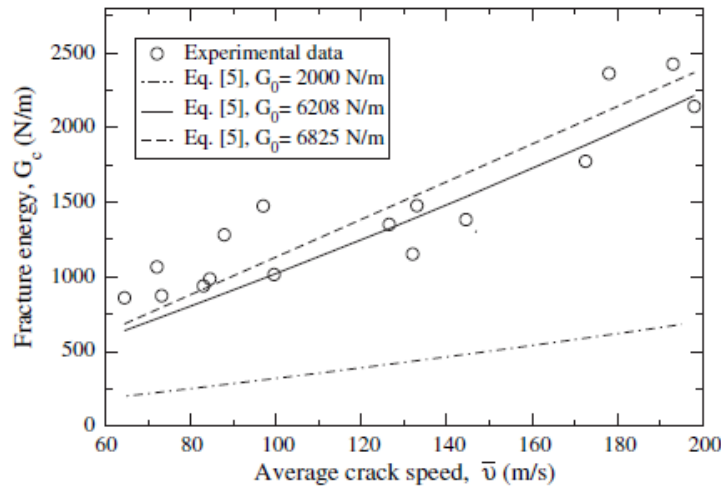


Figura 22: Energía de fractura frente a la velocidad media de propagación de fisura [30].

Los autores se basaron en el artículo de Zhou et al. [31] los cuales propusieron una relación empírica para correlacionar las dos variables de la figura 22 ( $G_c$  y  $\bar{v}$ ) para el rango de velocidades entre 100 y 650 m/s. La correlación se muestra a continuación:

$$G_c(\bar{v}) = G_0 \ln \left( \frac{v_L}{v_L - \bar{v}} \right) \quad (40)$$

Las constantes  $G_0$  y  $v_L$  adquirirían los valores de 2000 N/m y 675 m/s respectivamente. Usando esta correlación, donde la velocidad de sus ensayos variaba entre 60 m/s y 200 m/s, no se llegó a obtener los resultados experimentales mostrados en la figura 22. Por tanto, se recalculó el valor de  $G_0$  para que diese un valor cercano a 6825 N/m, el cual reproduciría los resultados experimentales con mayor precisión.

Para el cálculo del nuevo valor de  $G_0^*$  fue utilizada la expresión 41.

$$G_0^* = G_0 \left( \frac{K_Q}{K_{IC}} \right)^2 \quad (41)$$

En vez de considerar la dureza de fractura, fue considerada la dureza aparente  $K_Q$ , obtenida mediante un ensayo con una probeta de las mismas dimensiones usadas para el cálculo de  $K_{IC}$  pero con una muesca en lugar de una fisura. Se obtuvo un valor de  $K_Q = 1,85 \text{ MPa m}^{0.5}$  y con ello un valor final de  $G_0^* = 6208 \text{ N/m}$ , que se asemejaba mucho más a los 6825 N/m que se buscaban.

## Resumen

En este artículo fue presentada una nueva metodología óptica experimental. La técnica consistía en fotografiar el proceso de propagación de la fisura en la probeta mediante una cámara fotográfica de alta velocidad, y tras un postprocesado de las imágenes resultantes, determinar de esta manera, la longitud de la fisura durante el ensayo.

Una característica propia de este método, en comparación con otros como el de la fotoelasticidad o el método de las caústicas, es que la longitud de la fisura podía ser medida desde diferentes puntos a través del espesor en cualquier instante de tiempo.

Cabe destacar que el uso de cámaras de alta velocidad para la obtención de los resultados hace que el error cometido sea considerable debido a que entra en juego el factor humano. Por tanto, se ha de tener presente que los resultados expuestos anteriormente no reflejan del todo la realidad.

Por último, se determinó que uno de los parámetros que más afectaba a la velocidad de propagación de fisura era la longitud inicial de la entalla, viéndose reducida la velocidad cuanto mayor fuese la longitud de ésta.

## 4.3 Modelo numérico

Este apartado se centra en la creación del modelo numérico con la implementación de XFEM en él para la simulación del ensayo de flexión en 3 puntos. Para ello, se han desarrollado sucesivos puntos en los que ha sido explicada la creación de dicho modelo para el estudio de la propagación de fisuras en modo I.

La manera de proceder para la creación del modelo numérico fue mediante el software de elementos finitos ABAQUS [32] y las aplicaciones que ofrece al respecto.



## Geometría

En este punto se han definido las dimensiones y geometría de la probeta para la simulación en Abaqus. Se trató de una probeta rectangular cuyas dimensiones se han obtenido del artículo de Loya et al. [30] y se corresponden con un largo de 100 mm, un alto de 20 mm y un ancho de 10 mm, además, la distancia entre los apoyos es de 80 mm y la fisura inicial se encuentra en el centro de la probeta a 40 mm de cada apoyo.

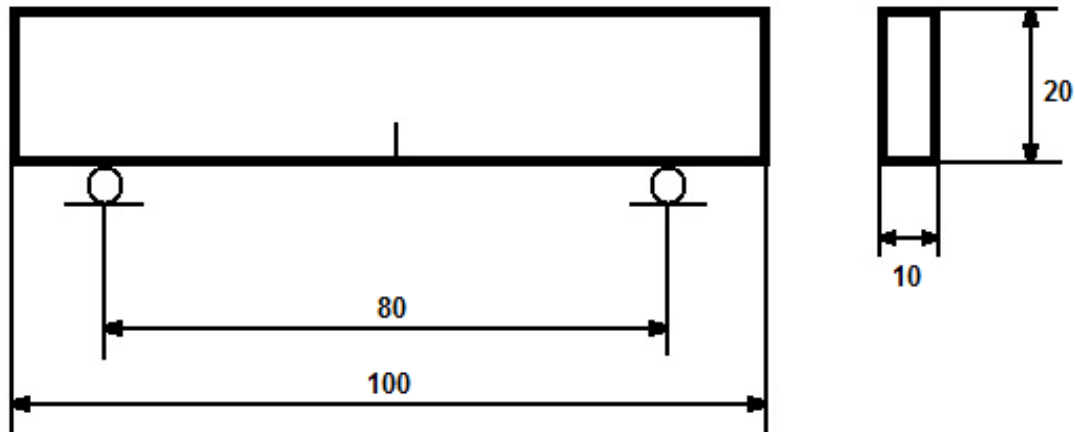


Figura 23: Dimensiones de la probeta y puntos de apoyo [30].

La creación de la probeta y la fisura en Abaqus se realizó mediante el módulo *Parts*. Se crearon por una parte la probeta y por la otra la fisura, ya que ésta última es tratada en XFEM como una unidad geométrica totalmente independiente y su interacción con la probeta se realiza a través del enriquecimiento de los nodos de los elementos adyacentes a ésta, como se explicó en anteriores capítulos.

En dicho módulo se procedió a dibujar ambas geometrías con las dimensiones anteriormente establecidas. En este caso, se está modelando la probeta (parte 1) en 3D, por tanto la fisura (parte 2) debe incluirse como un elemento bidimensional tipo placa (Shell). En caso de que se estudie el modelo con una probeta bidimensional, la fisura se debería ser implementada mediante un elemento unidimensional tipo "wire". En la figura 24 se muestra la probeta con las dos partes ensambladas.

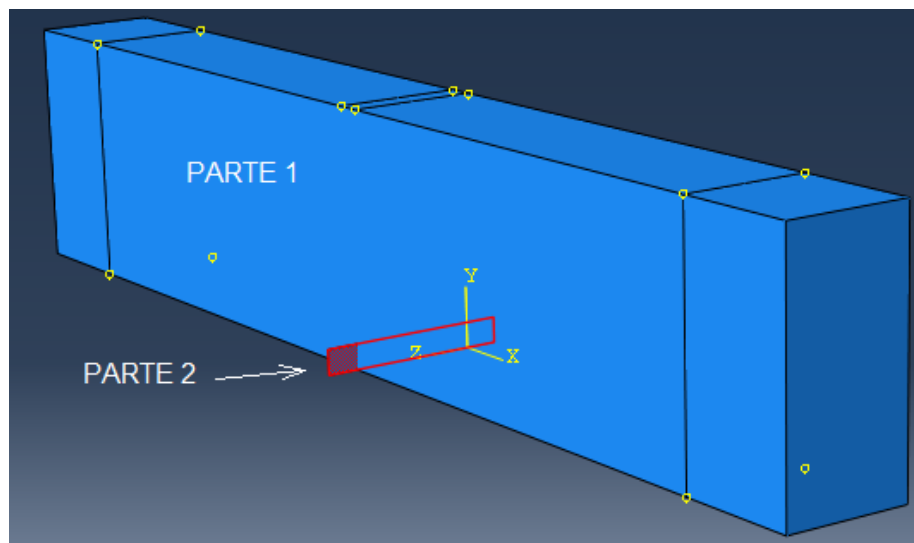


Figura 24: La probeta (parte 1) y la fisura (parte 2) ensambladas.

## Material

El material usado para el modelo numérico se corresponde con el mismo que aparece en el artículo de Loya et al. [30]. Se trata de un polímero, en concreto polimetilmetacrilato (PMMA) que se obtiene de la polimerización del metacrilato de metilo y la presentación más común en la que se puede encontrar es en gránulos (para procesos de inyección o extrusión) o en placas (termoconformados). Destaca de otros plásticos por su resistencia a la intemperie, su transparencia y su resistencia al rayado, es por eso que se utiliza en la industria del automóvil (faro del coche), iluminación, cosméticos, espectáculos, construcción, óptica, entre otras muchas aplicaciones.

En el mismo artículo vienen definidas las propiedades ya mostradas anteriormente en la Tabla 1.

Para implementar dicho material en Abaqus se fue al módulo *Property*. En este módulo, además de introducir las propiedades anteriores, es importante definir la iniciación del daño, ya que marca a partir de que tensión propagará la fisura y definir también la evolución del daño, que indica de qué manera irá evolucionando la fisura.

En este caso, la evolución del daño fue del tipo “energía” porque se dispone de los datos suficientes para calcular la tasa de liberación de energía del material, que a su vez, es necesaria para describir el comportamiento del modo mixto “BK” elegido. La ley BK se rige por la siguiente expresión:

$$G_{equivC} = G_{IC} + (G_{IIC} - G_{IC}) \left( \frac{G_{II} + G_{III}}{G_I + G_{II} + G_{III}} \right)^n \quad (42)$$

Esta ley combina las tasas de liberación de energía de los diferentes modos de fractura para dar una única tasa de liberación de energía equivalente del material.

En este caso, al tratarse de un material isótropo, las energías en los diferentes modos de fractura son las mismas y por tanto, la energía crítica de fractura equivalente corresponde con la energía crítica en modo I.

El exponente es el parámetro que sirve para ajustar la energía y que depende del material. Suele variar entre 1 y 3, dependiendo del material, pero en este caso no afectará en los resultados ya que según la expresión 42 “ $G_{IIC} - G_{IC}$ ” es cero al tratarse de la misma energía de fractura.

La tasa de liberación de energía se define como un parámetro que mide la energía disponible para la propagación de un incremento de fisura y la expresión que permite calcularla es la siguiente:

$$G_c = \frac{K_{IC}^2}{E'} \quad (43)$$

siendo  $K_{IC}$  el factor de intensidad de tensiones del polímero y  $E'$  el Módulo de Young en deformación plana (DP) calculado mediante la siguiente expresión:

$$E' = \frac{E}{(1 - \mu^2)} \quad (44)$$

siendo  $E$  y  $\mu$  el módulo elástico y el coeficiente de poisson del polímero respectivamente.

Calculando con la expresión 43, el resultado obtenido para la energía de fractura es de  $331.55 \text{ J/m}^2$ .

Se ha de recordar que el factor de intensidad de tensiones y el Módulo de Young están calculados experimentalmente, y que el coeficiente de Poisson y la densidad del material son valores aproximados. Por tanto, es posible que estas propiedades del material lleven asociados algunos errores en su medida y la energía de fractura pueda adquirir valores diferentes en un rango de  $250\text{-}400 \text{ J/m}^2$ . Por ejemplo, en el trabajo desarrollado por Gómez Sánchez, F. Javier [33], con una similitud de ensayo muy parecida al modelo de estudio del presente trabajo, el valor obtenido para la energía de fractura de un PMMA es de  $290 \text{ J/m}^2$ .

La energía de fractura que finalmente quedó establecida para el modelo numérico adquirió un valor de  $263 \text{ J/m}^2$ , ya que con dicho valor se obtuvieron resultados más satisfactorios.

## XFEM

En este apartado se ha procedido a explicar cómo implementar el método XFEM en el código de elementos finitos Abaqus. La mayor dificultad reside en cómo implementar una fisura en Abaqus y hacer que propague adecuadamente.

Volviendo al caso que se está modelando en 3D, la placa creada para actuar como fisura en el modelo, ha de tener de alto la longitud de fisura inicial que se esté estudiando en ese momento, y de largo, como mínimo, la anchura de la probeta.

En este caso, el largo de la placa es algo mayor que la anchura de la probeta, con el fin de evitar que coincidan en una misma posición los nodos de la placa con los nodos de la malla de la probeta. Con esta técnica se evitan posibles problemas en la obtención de resultados. Cabe destacar, que la longitud sobrante de la placa no afecta en ningún momento a los resultados a obtener.

El material previamente creado según lo explicado en el apartado anterior, solo se le asigna a la probeta (parte 1) ya que la parte 2 solo sirve para actuar como fisura inicial y no tiene sentido asignarle un material.

En el módulo *assembly* se ensamblaron ambas partes como se mostraba en la figura 24 de tal forma que la fisura quedase centrada en la probeta.

A continuación, fueron necesarias establecer ciertas características a la placa para que actuase como fisura. Para ello, en el módulo *Interaction* se seleccionó en la barra de menú principal la opción *Special* → *Crack* → *Create*. En la ventana emergente se marcó la opción XFEM (figura 25).

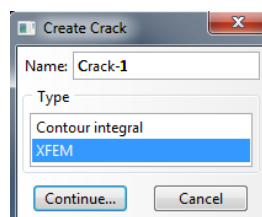


Figura 25: Diálogo que aparece tras crear la fisura.

Posteriormente se seleccionó toda la probeta como dominio de fisura y en la ventana que apareció se marcó la opción *Allow crack growth* para permitir el crecimiento de la misma.

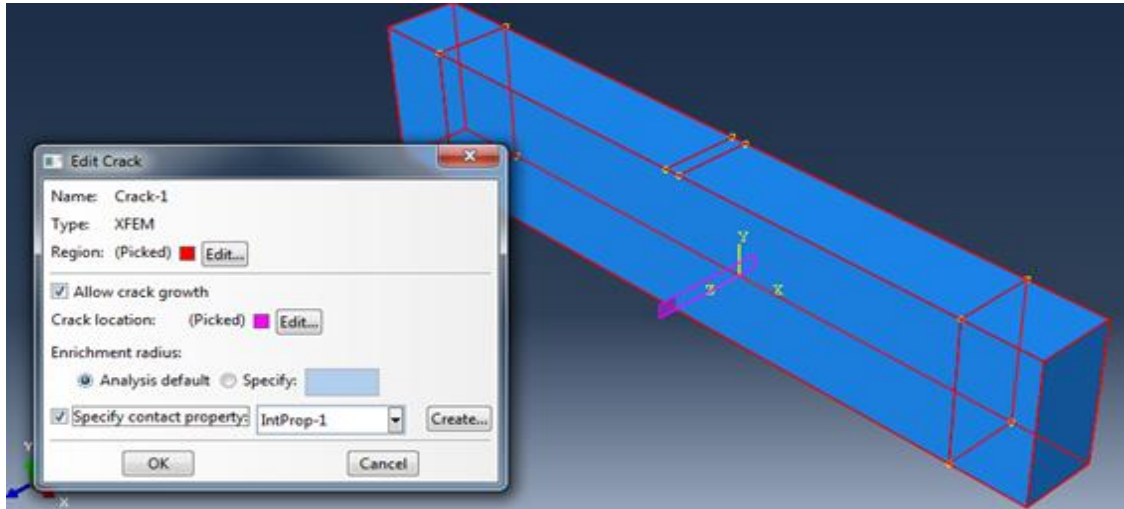


Figura 26: Selección del dominio de fisura (rojo) y localización de la fisura (fucsia).

Seguidamente, se pinchó en *edit* para poder seleccionar la placa como la localización de la fisura. Con esta operación, se consigue que los nodos de los elementos cercanos a la fisura se encuentren enriquecidos mediante las funciones típicas de enriquecimiento explicadas en el capítulo 3. También existe la posibilidad de que el modelo a crear no tenga ninguna fisura inicial y por tanto se enriquecerían todos los nodos de la probeta y la fisura empezaría a propagar por donde se alcanzase el criterio de rotura primeramente.

Posteriormente, se marcó en la misma ventana anterior la opción que aparece como *Specify contact property*, para especificar la propiedad de contacto entre la probeta y la placa.

En la nueva ventana emergente se marcó la opción de tipo *contact* y se seleccionó un contacto del tipo: *Mechanical* → *Normal Behavior*. En este caso, el contacto ha de ser mecánico y con un comportamiento normal, para que las superficies que estén próximas entre sí, sólo interactúen en la dirección normal para evitar la penetración.

Una vez realizado todo este proceso, la placa quedó definida como fisura inicial y la parte de implementar XFEM en Abaqus finalizó.

### Cargas y condiciones de contorno

En el módulo *Load* han sido definidas las cargas y las condiciones de contorno del modelo. En este caso, la carga se introdujo como una condición de contorno de tipo velocidad.

Como se trata de un ensayo de flexión en 3 puntos, fue creada una condición de contorno del tipo *Symmetry/Antisymmetry/Encastre* en la que los dos apoyos eran tratados como *Pinned*, ya que los desplazamientos longitudinales estarán restringidos pero no la rotación.

Esta condición de contorno ha de ser aplicada en el ancho de la probeta y para ello, se crearon 2 líneas ficticias (marcadas en rojo en la figura 27) en la parte inferior de la probeta, las cuales han de ser seleccionadas como puntos de apoyo. Es importante que la condición de contorno sea aplicada en toda la línea ya que si sólo se aplicase en los puntos exteriores de dicha línea, la probeta sufriría también una deformación a lo largo de su ancho.

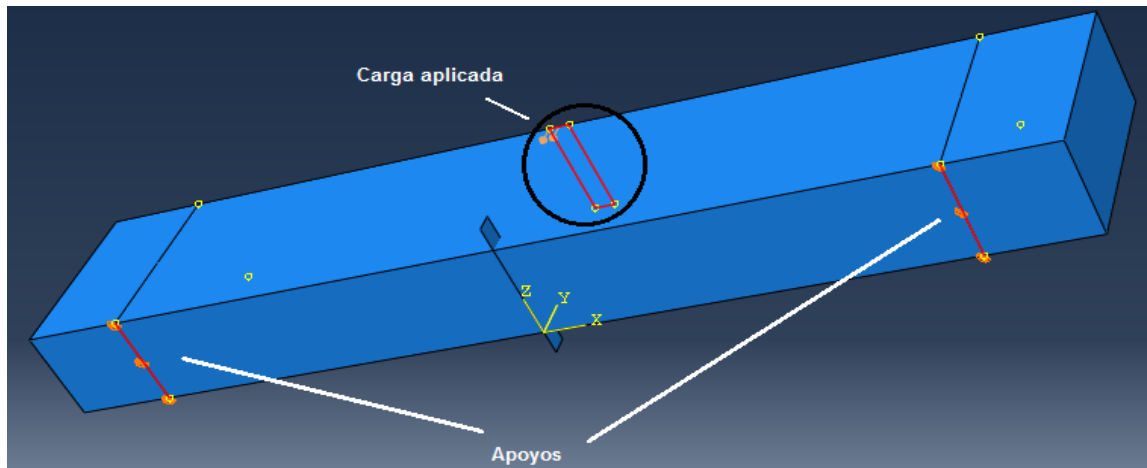


Figura 27: Disposición de las condiciones de contorno aplicadas en la probeta.

En cuanto a la aplicación de la carga, se creó una pequeña área mediante una partición de superficie en la parte superior de la probeta. Para la aplicación de dicha carga, se creó otra condición de contorno pero esta vez se seleccionó la opción de *Velocity / Angular Velocity* y posteriormente, se marcó el área creada anteriormente. Finalmente se introdujo en la dirección V2 el valor de la velocidad de desplazamiento pero en negativo, para que el desplazamiento tuviese lugar en el sentido negativo del eje Y.

Este proceso anterior se realiza una única vez y para los diferentes casos de velocidad de desplazamiento existentes sólo se ha de cambiar el valor de la velocidad, no siendo necesario crear de nuevo dicha condición de contorno.

### Step

En el módulo *Step* se creó un paso del tipo "*Dynamics, Implicit*". El XFEM sólo puede aplicarse sobre métodos implícitos en la versión de Abaqus 6.10 y dicha restricción limita las opciones de cálculo a escoger. Dentro de dichas opciones, se ha de seleccionar la del tipo dinámico ya que la carga aplicada es una velocidad y por tanto depende del tiempo.

En este mismo módulo se ha de activar la opción de *Nonlinear Geometry*. En principio, las no linealidades geométricas no se deberían activar puesto que las deformaciones y los desplazamientos que sufre la probeta son muy pequeños, dado que las velocidades de desplazamiento no son muy elevadas, pero al estar analizando un sólido fisurado, aparece una no linealidad geométrica en el extremo de fisura, ya que la tensión en ese punto tiende a infinito.

También, se ha de seleccionar la opción de *Quasi-static* ya que nuestro problema se puede considerar cuasi-estático debido a la baja velocidad de desplazamiento, aunque ésta varíe en el tiempo. También se ha de ajustar el tiempo del ensayo y los incrementos de tiempo para que el problema converja adecuadamente, aunque esto último varía dependiendo del caso en estudio.

## Malla

La sensibilidad de la malla es una de las partes más delicadas del modelo. Una malla muy fina dará resultados más exactos pero también penalizará con más tiempo de cálculo. Es por ello que se debe buscar un punto de equilibrio entre exactitud de la solución y el tiempo de cálculo invertido.

En lo referente al método XFEM, la principal ventaja de este método es que no requiere un remallado cada vez que la fisura propaga pero es muy sensible al tamaño de elemento que se establezca, por lo que una variación pequeña puede dar resultados totalmente diferentes.

En lo que se refiere al mallado de las partes, solo se ha mallado la probeta (parte 1), ya que como se ha mencionado anteriormente, el modelado de la fisura se realiza mediante la placa y no es necesario mallarla o aplicarle material.

La malla de la probeta alberga la particularidad de haber sido mallada por la opción "Bias". Esta opción permite que los elementos de un eje seleccionado sean más pequeños en la zona elegida y vayan aumentando de tamaño según un ratio que se establezca *a priori*.

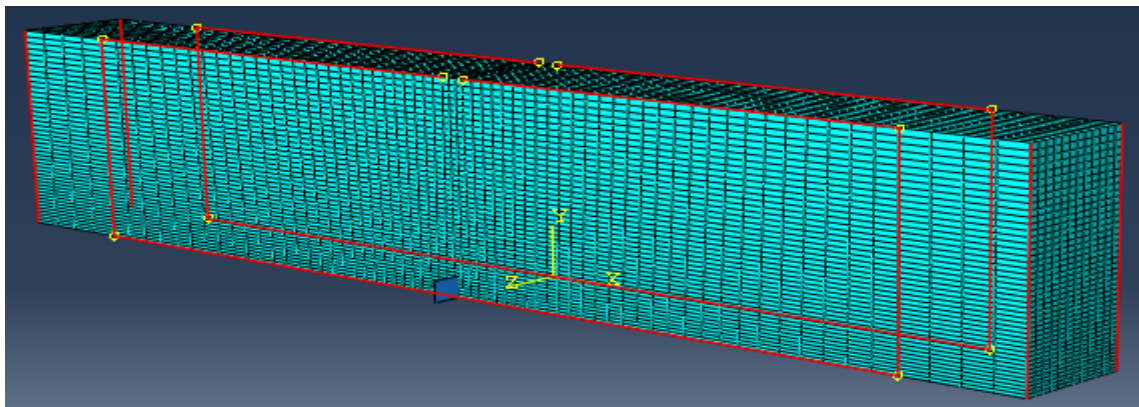


Figura 28: Mallado mediante la opción Bias.

En la figura 28 se puede observar como los ejes de la probeta marcados en rojo han sido mallados mediante esta opción, y se aprecia cómo en la zona cercana a la posición de la fisura, los elementos de la malla tienen un menor tamaño.

Cada eje se ha dividido en 30 elementos y el ratio establecido es de 2, es decir, que el elemento más alejado de la base es 2 veces mayor que el elemento que se encuentra en la misma.

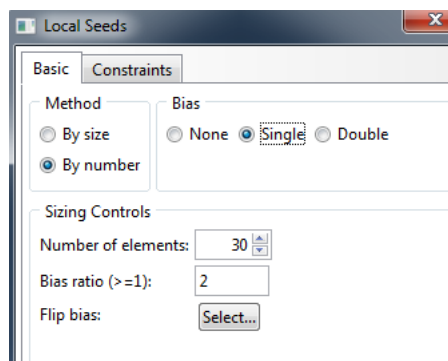


Figura 29: Cuadro de diálogo con el número de elementos y el ratio.



Mediante esta opción, los elementos inferiores son más pequeños y esto permite ajustar aún más la malla en la zona por donde la fisura comienza a propagar, obteniéndose resultados más precisos sin añadir un coste computacional significativo.

#### 4.4 Comparación de resultados

Una vez mostrados los resultados obtenidos experimentalmente en el punto 4.2 y explicada la realización del modelo numérico en Abaqus en el punto 4.3, se ha llevado a cabo, en este apartado, una comparativa entre los resultados numéricos y experimentales con la finalidad de poder validar el modelo numérico.

En primer lugar, se han comparado de forma cualitativa los resultados obtenidos. Como se puede observar en la figura 30, la fisura ha propagado de forma rectilínea. Esto era de esperar dada la disposición de cargas y las condiciones de contorno del propio ensayo.

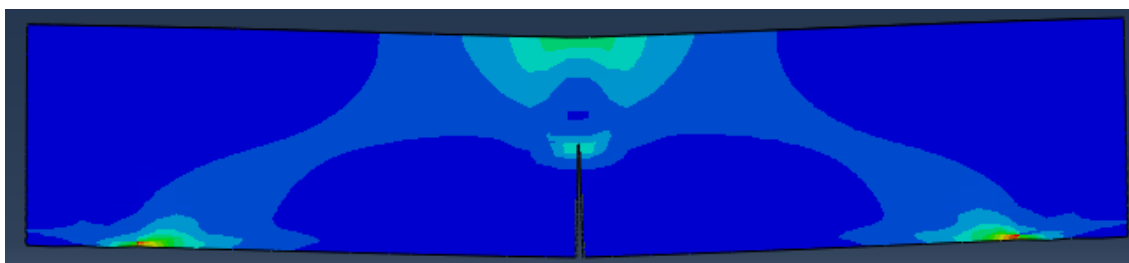


Figura 30: Probeta de PMMA fisurada tras la simulación numérica.

En la figura 31 se muestra una comparación cualitativa de la propagación de fisura obtenida en el ensayo experimental y la lograda mediante la simulación numérica. Como se puede observar, son prácticamente idénticas.

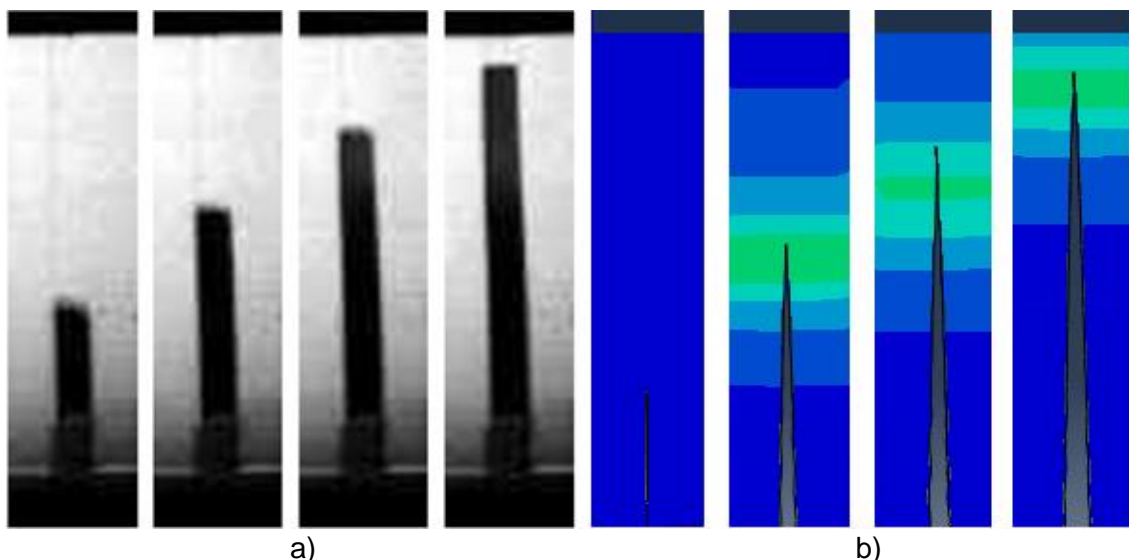


Figura 31: Evolución de la propagación de la fisura de forma experimental a) [30] y de forma numérica b).

Se ha de recordar que el modelo numérico realizado en Abaqus es en 3 dimensiones y por tanto, se pueden apreciar cambios en la velocidad de propagación de fisura a lo largo del ancho de la probeta. En la figura 32 se muestra la vista de perfil de la fisura (ancho de la probeta) y se puede apreciar cómo ha propagado antes por el

centro que por los laterales. Esto se debe a que en el centro de la probeta se trabaja con la hipótesis de deformación plana, mientras que en las superficies libres se considera la hipótesis de tensión plana.

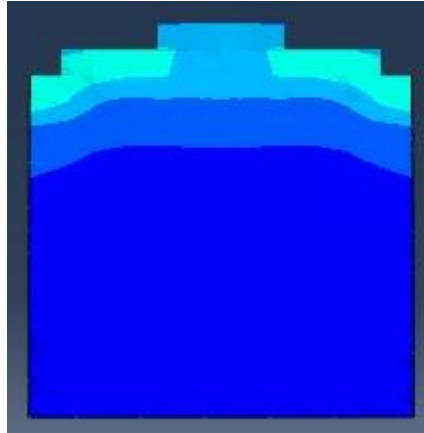


Figura 32: Variación de la velocidad de propagación de fisura a lo largo del ancho de la probeta.

Tras la comparación cualitativa de los resultados, se ha procedido a realizar una comparación cuantitativa de los datos obtenidos.

Como ya se ha explicado en el apartado 4.2, las variables con más relevancia en el ensayo eran: la velocidad de propagación de la fisura y la longitud de fisura inicial. Es por ello, que la totalidad de las gráficas mostradas a continuación contendrán al menos alguna de estas dos variables. Se ha de recordar que en dicho artículo aparecen 4 longitudes de fisura inicial y 4 velocidades de desplazamiento diferentes, por lo que existen un total de 16 ensayos distintos.

El cálculo de todos los errores relativos de este apartado ha sido obtenido mediante la siguiente expresión:

$$Error\ relativo\ (\%) = \frac{|Vel. Abaqus - Vel. Exp. |}{Vel. Exp.} \times 100 \quad (45)$$

#### 4.4.1 Comparación de velocidades medias de propagación

En primer lugar, se ha llevado a cabo una comparación de las velocidades medias obtenidas durante la propagación de fisura.

En la figura 33 se muestra la gráfica para los distintos casos con velocidades de desplazamiento diferentes y probetas de fisura inicial de 2 milímetros. En dicha gráfica se observa cómo apenas existe diferencia entre las velocidades medias obtenidas de forma experimental y numérica.

Se puede contemplar cómo para velocidades de desplazamiento de 0,5 mm/min, la velocidad media obtenida tanto para el modelo numérico como para el ensayo experimental, es menor en comparación con las obtenidas para el resto de velocidades de desplazamiento. El error relativo promedio es de un 7%, por tanto se puede decir que el modelo numérico es válido para representar la mayoría de los casos en los que la probeta tenga una fisura inicial de 2 milímetros, independientemente de la velocidad de desplazamiento a la que esté sometida la probeta.



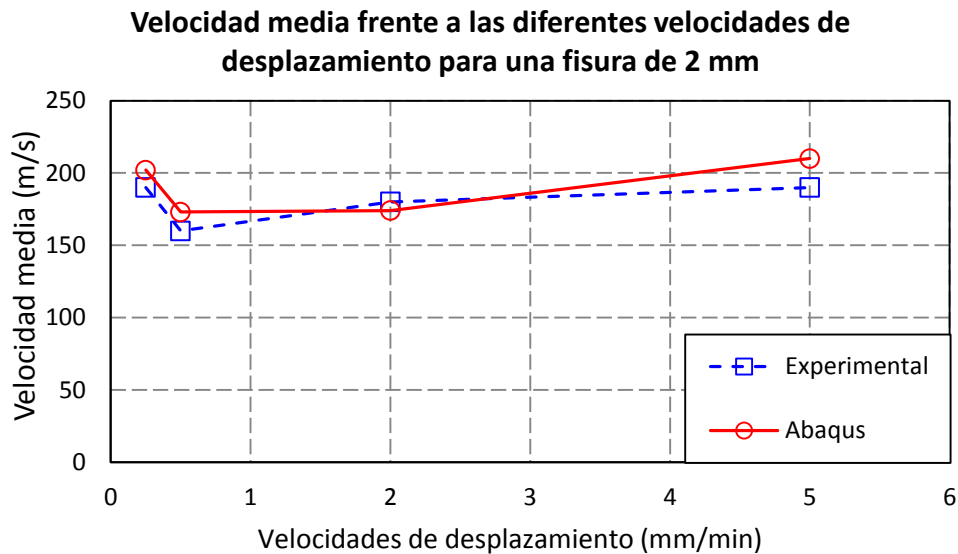


Figura 33: Comparación de velocidades medias para una probeta de fisura inicial de 2 mm y diferentes velocidades de desplazamiento.

En la figura 34 se encuentran mostradas las velocidades medias obtenidas para las probetas con una fisura inicial de 5 milímetros y las diferentes velocidades de desplazamiento. Como se puede apreciar en la gráfica, las velocidades medias obtenidas de forma numérica están en todos los casos por debajo de las experimentales. En cuanto a la forma que adquieren los datos numéricos, se observa que se adaptan de manera precisa dando la mínima velocidad media para una velocidad de desplazamiento de 0,5 mm/min. El error relativo promedio cometido de forma numérica es de aproximadamente un 15%.

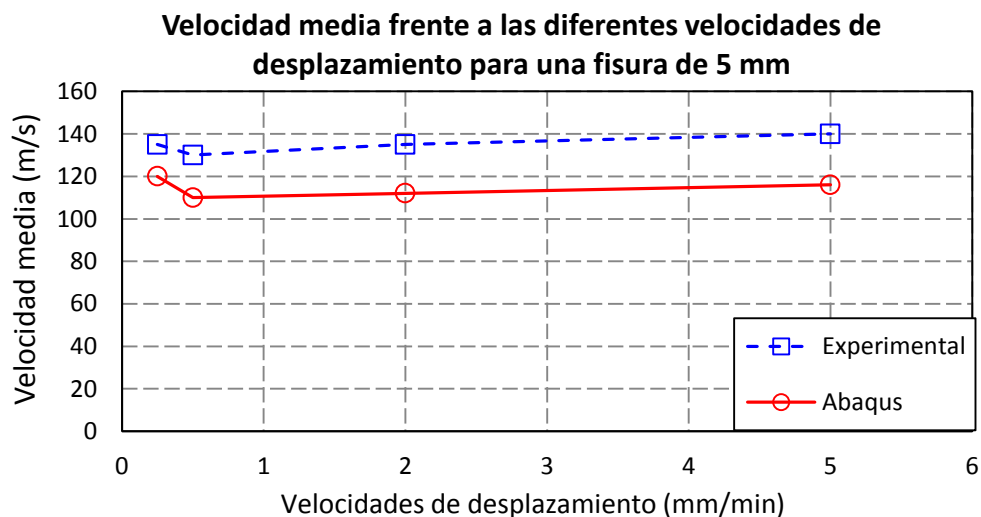


Figura 34: Comparación de velocidades medias para una probeta de fisura inicial de 5 mm y diferentes velocidades de desplazamiento.

En la gráfica de la figura 35 se comparan los casos correspondientes a las probetas de 8 milímetros de fisura inicial. Se puede observar cómo se repiten las mismas tendencias que en el caso anterior. El modelo numérico se adapta en forma a los datos experimentales pero las velocidades medias quedan por debajo de las registradas en los ensayos experimentales. El error relativo promedio cometido adquiere un valor parecido al del caso anterior, alrededor de un 16%.

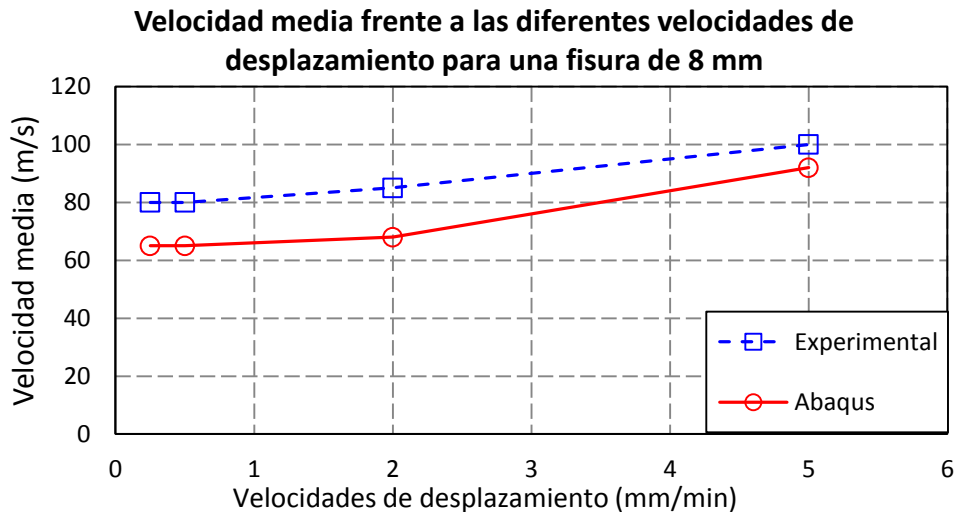


Figura 35: Comparación de velocidades medias para una probeta de fisura inicial de 8 mm y diferentes velocidades de desplazamiento.

Por último, en la gráfica de la figura 36 se muestra la comparación de velocidades medias para las probetas con fisura inicial de 10 milímetros. En este caso, las velocidades obtenidas numéricamente superan a las experimentales pero la diferencia entre ellas sigue siendo parecida a la de los anteriores casos. El mínimo de velocidad se obtiene para los ensayos cuya velocidad de desplazamiento es de 0,5 mm/min, como en la mayoría de los casos anteriores. El error relativo promedio cometido es del 14%.

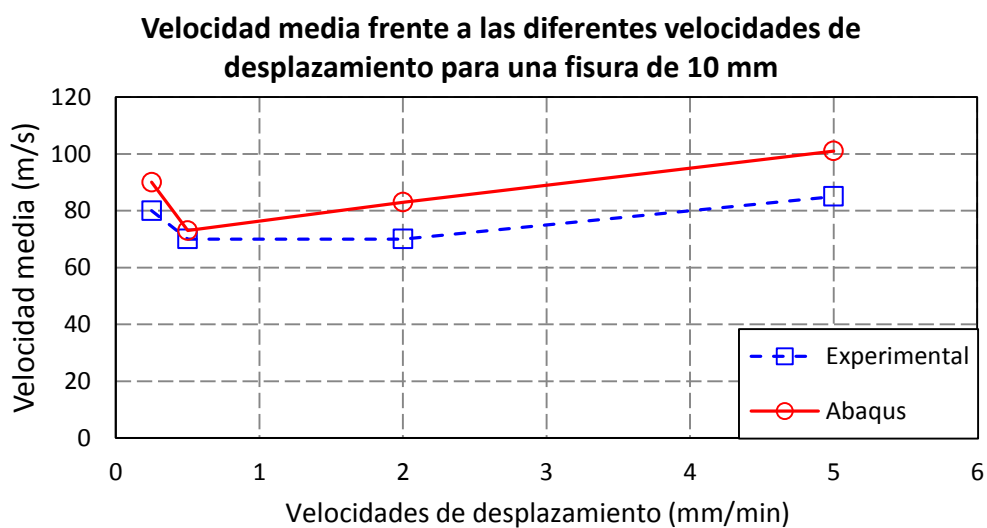


Figura 36: Comparación de velocidades medias para una probeta de fisura inicial de 10 mm y diferentes velocidades de desplazamiento.

En la totalidad de las gráficas anteriores se puede apreciar una gran similitud entre los datos obtenidos de forma numérica y experimental, especialmente para los casos con fisura inicial de longitud 2 milímetros como se observaba en la figura 33.

#### 4.4.2 Comparación de velocidades instantáneas de propagación

Posteriormente, se ha llevado a cabo una comparación de la fluctuación de las velocidades de propagación de fisura para ensayos específicos.

Como se puede apreciar en la figura 37, los resultados obtenidos de forma numérica se ajustan bastante bien a los obtenidos de forma experimental. En este caso, la velocidad pico numérica obtenida es ligeramente superior a la experimental. La velocidad va ascendiendo hasta que la fisura alcanza los 7 milímetros de longitud y a partir de ahí va decreciendo de forma suave. El error promedio cometido para este caso es de aproximadamente un 8%, relativamente pequeño teniendo en cuenta que los modelos numéricos son simplificaciones de la realidad.

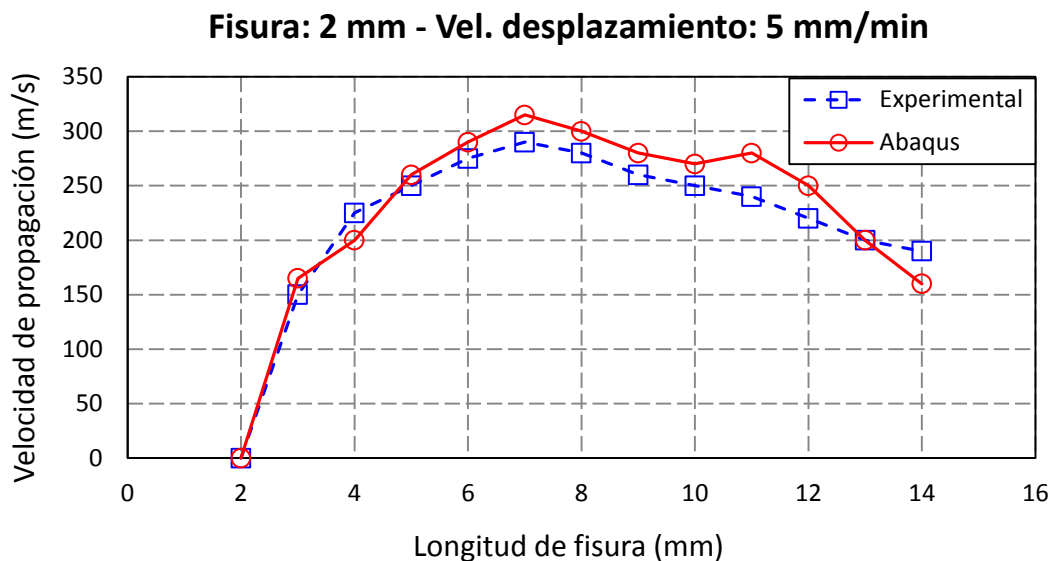


Figura 37: Comparación de las velocidades instantáneas de propagación experimental y numéricas.

En la figura 38 se muestra otra gráfica en la que se siguen comparando velocidades de propagación de fisura para otro caso específico. En concreto, ha sido reducida la velocidad de desplazamiento de 5 mm/min a 2 mm/min y la longitud de fisura inicial se mantiene en 2 milímetros. Se puede observar cómo la tendencia que adquieren los datos numéricos se adapta en forma a los de los datos experimentales, teniendo lugar la velocidad pico a los 4 milímetros de longitud de fisura y decreciendo de manera paulatina a partir de ese punto. Como se puede apreciar, al final de la gráfica se obtuvo un punto atípico. Esto puede ser causa de una mala medición en Abaqus debido a que el tamaño de los elementos es mayor en la parte superior de la probeta y por tanto, se obtienen datos con peor precisión. Es por ello que el error cometido se eleva hasta un 10%.

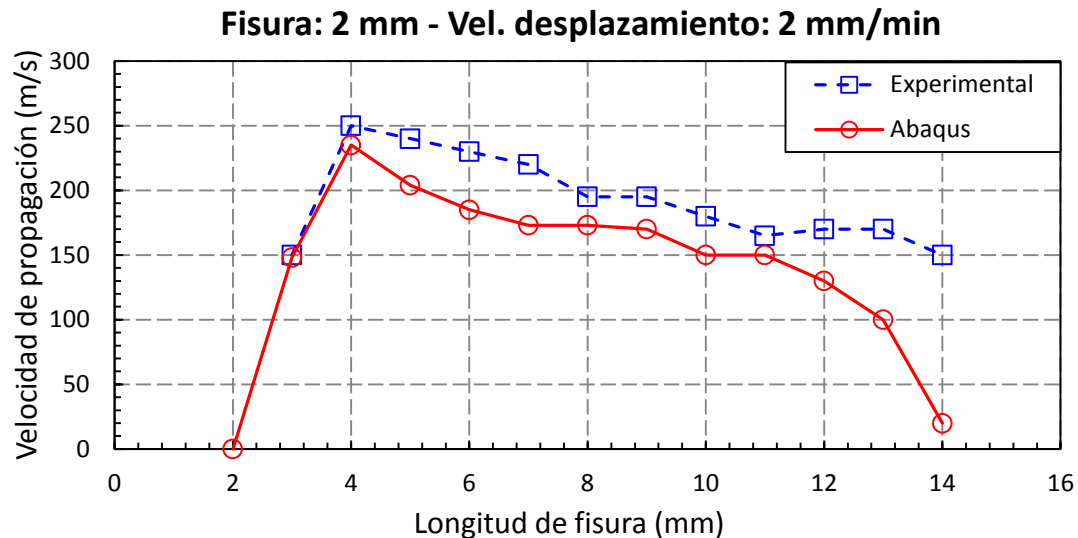


Figura 38: Comparación de las velocidades instantáneas de propagación experimental y numéricas.

En la figura 39 se puede observar la comparación de las velocidades de propagación para un caso en el que la fisura inicial es de 10 milímetros y la velocidad de desplazamiento es de 5 mm/min. Lo particular de este caso es que la fisura inicial es bastante mayor que la de los casos anteriores y la velocidad pico alcanzada por tanto, es inferior a la obtenida en los casos anteriores. Además la fluctuación de la velocidad de propagación es mayor pudiéndose apreciar cómo en determinados puntos del ensayo, dicha velocidad adquiere prácticamente valores nulos.

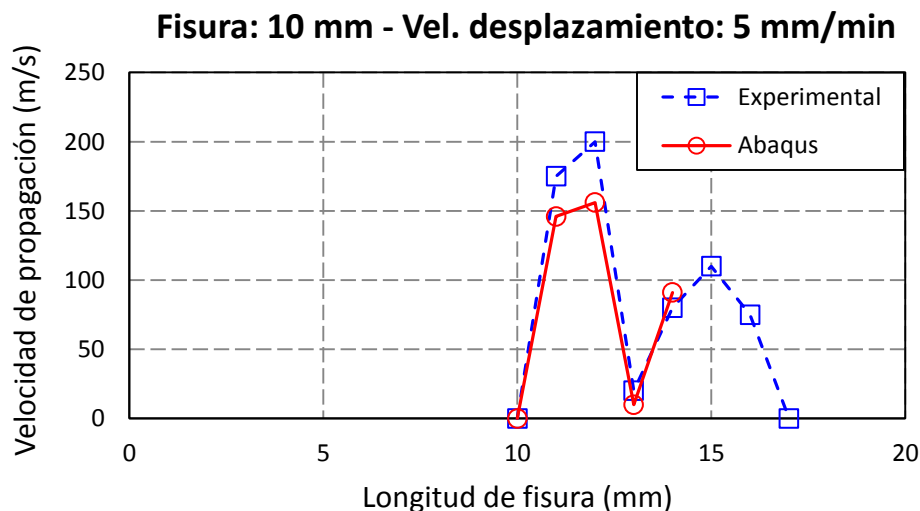


Figura 39: Comparación de las velocidades instantáneas de propagación experimental y numéricas.

La velocidad máxima alcanzada en el ensayo experimental fue de 200 m/s, en cambio, el modelo numérico apenas llega a 160 m/s. Se puede observar cómo el modelo numérico se adapta en forma al modelo experimental, simulando el pico de velocidad máxima y la caída de velocidad en el mismo instante de tiempo. Cabe destacar que a partir de los 14 milímetros de longitud de fisura, ésta no ha seguido propagando, por lo que no se tienen datos con los que comparar. El error promedio cometido en el modelo numérico es de un 20%, mayor que en los anteriores casos,

pero principalmente se debe al cuarto punto que corresponde con la caída de velocidad, que numéricamente se obtiene un valor cercano a cero pero en el ensayo

En resumen, como se ha podido observar en las comparaciones de casos específicos, si la longitud de fisura inicial era pequeña, las velocidades de propagación de fisura eran mayores y por tanto, el modelo numérico se ajustaba con mayor precisión a los datos experimentales, como se puede observar en las gráficas de velocidades instantáneas para los casos específicos.

A medida que la longitud de fisura inicial aumentaba, el modelo numérico reflejaba en peor medida los picos de velocidad de los ensayos experimentales aunque por otro lado, se adaptaba con buena precisión a la evolución de la velocidad de propagación en estos casos en los que la velocidad era menor.

# CAPÍTULO V

## ANÁLISIS DE COMPORTAMIENTO DEL DAÑO FRENTE A MODO MIXTO

### 5.1 Introducción

Este capítulo se ha centrado en el análisis del comportamiento del daño frente a un modo mixto de fractura en probetas de PMMA. Como se ha dicho anteriormente, se denomina modo mixto al caso en el que actúan simultáneamente varios modos de fractura, en concreto, en el presente estudio actúan los modos I y II al mismo tiempo.

Para la realización de dicho análisis, el capítulo ha sido dividido en 3 apartados similares a los del capítulo anterior.

Primeramente, se ha realizado un estudio de diversos artículos internacionales relacionados con ensayos en modo de fractura mixto y principalmente, se ha desarrollado un artículo de Nooru-Mohamed [33], detallando la realización de los ensayos experimentales llevados a cabo por él mismo así como los resultados obtenidos.

Posteriormente, se han mostrado los cambios principales realizados en el modelo numérico con respecto al del apartado 4.3 para el desarrollo del nuevo modelo.

Finalmente, ha sido llevada a cabo de nuevo una comparación de los resultados obtenidos experimental y numéricamente con la finalidad de dar por válido el modelo numérico.

### 5.2 Resultados experimentales de validación

En este apartado se explica en qué consiste el llamado Test de Nooru-Mohamed. Para ello, se ha extraído información de diversos artículos y tesis en los que se ha realizado dicho test o se han llevado a cabo estudios acerca de él.

Uno de estos artículos corresponde a un estudio que realizó el propio Nooru-Mohamed [33] sobre el comportamiento del hormigón cuando se encuentra sometido a un modo mixto de fractura. En dicho artículo se lleva a cabo el desarrollo de un ensayo que posteriormente llevaría su nombre.

Este test fue diseñado especialmente para validar modelos y la particularidad que alberga es que, debido a la disposición de las cargas (para crear el modo mixto de fractura), la fisura adquiere una trayectoria curva al propagar y por tanto, su camino a seguir se vuelve impredecible.

Es conveniente realizar ensayos y estudios acerca de la propagación de fisuras en modo mixto de fractura, ya que la mayoría de las estructuras suelen estar sometidas simultáneamente a cargas con distintas direcciones de aplicación y por tanto, se hace necesario conocer de antemano la respuesta que tendrá una fisura, sometida a un estado de cargas que le produzcan un modo mixto de fractura.

En la imagen 40 se muestra un esquema de la realización de este ensayo con una probeta de medidas estándar:

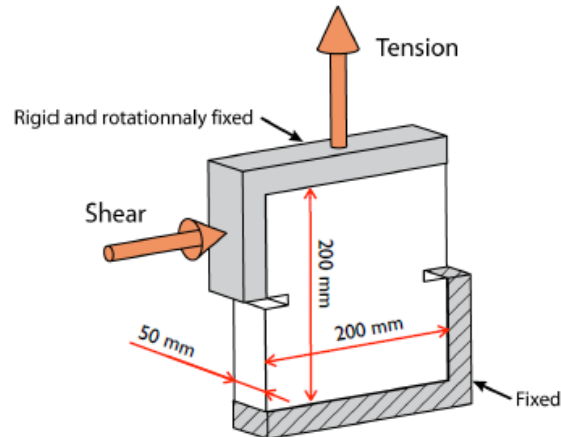


Figura 40: Realización del ensayo de Nooru-Mohamed [35].

La máquina empleada por Nooru-Mohamed (figura 41) para su ensayo fue construida en el Laboratorio Stevin, de la Universidad de Tecnología de Delft, en Países Bajos. Consiste en dos bastidores independientes capaces de moverse horizontal (bastidores A) y verticalmente (bastidor B). La carga axial, aplicada por el actuador hidráulico B, y la carga de cizallamiento, aplicada por el actuador hidráulico A, están aplicadas en la probeta de forma independiente a través de cada uno de los bastidores.

Cada bastidor tiene adjunto unas placas-resorte (plate spring) que evitan la rotación de estos y soportan una limitada flexión. A cada lado de estas placas-resorte están montados dos medidores de tensión conectados al sistema de adquisición de datos. Cualquier excentricidad que pudiese aparecer durante la realización del ensayo podía ser registrada por estos medidores.

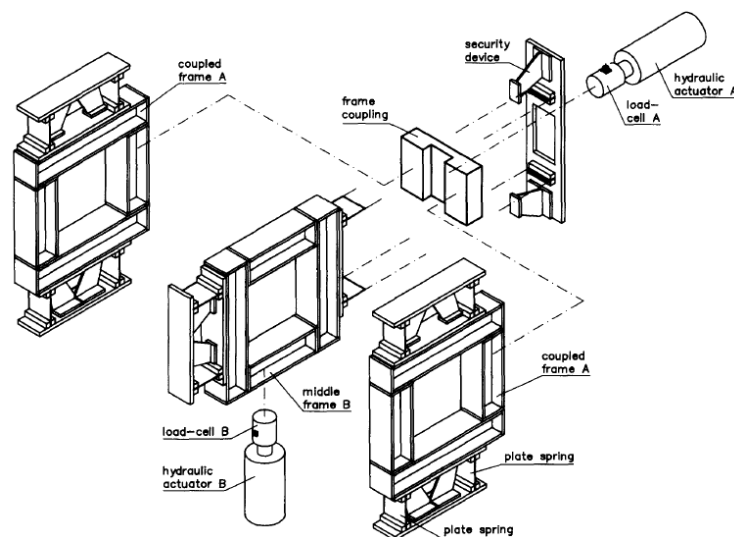


Figura 41: Máquina diseñada por Nooru-Mohamed para sus ensayos en modo mixto. [33]

Para una mejor comprensión del funcionamiento de la máquina, la figura 42 muestra una imagen más detallada del sistema de aplicación de las cargas. En ella se puede ver cómo la parte superior de la probeta está pegada a la parte interior del bastidor central y la parte inferior de la probeta se encuentra unida al plato que conecta con los dos bastidores exteriores.

El bastidor central puede deslizarse verticalmente entre los dos bastidores externos y la probeta se carga cuando el bastidor central se mueve hacia arriba. Como ambos bastidores externos tienen fijado su movimiento vertical, esto crea una fuerza de tracción en la probeta. La fuerza de cizallamiento viene dada por el movimiento horizontal de los bastidores externos. Esta composición de cargas simultáneas crea en la probeta un modo mixto de fractura.

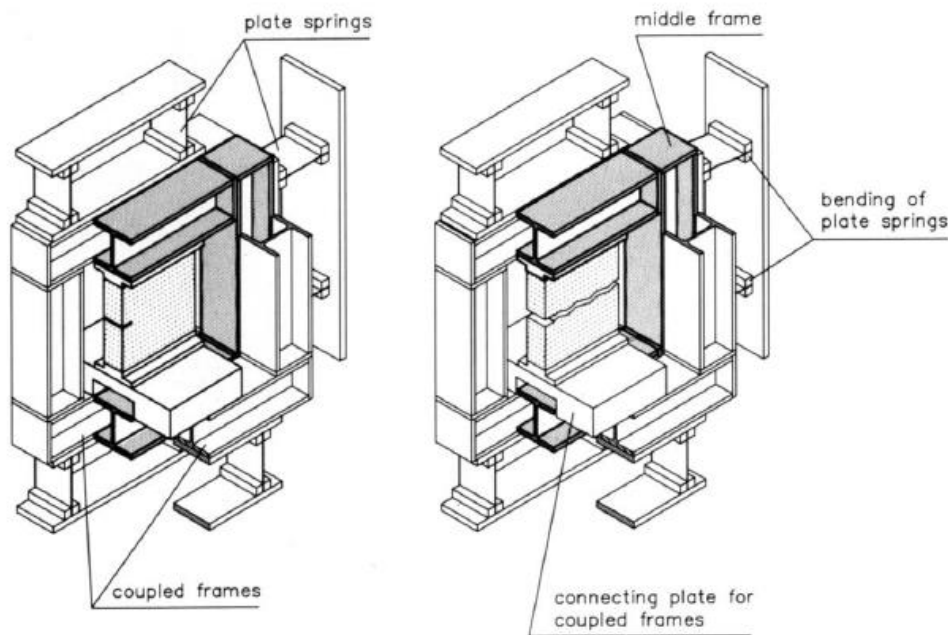


Figura 42: Funcionamiento de la máquina [34].

Nooru-Mohamed, en su propio desarrollo del test [34], reconoce que las condiciones de contorno para este ensayo no están del todo establecidas y por tanto, cada investigador que decida estudiar algún caso empleando dicho test, es libre de establecer sus propias condiciones de contorno. En la figura 43 se muestra esquemáticamente dichas condiciones empleadas para su ensayo. Éstas permiten el movimiento vertical y horizontal durante el test.

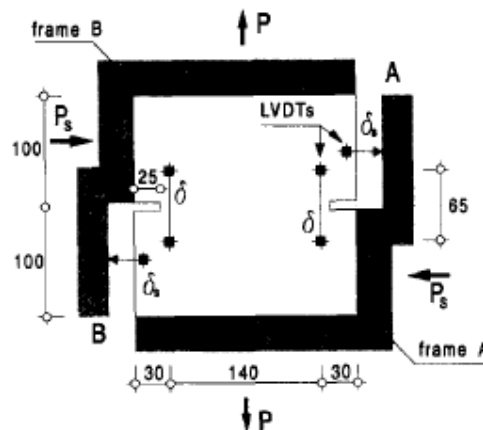


Figura 43: Aplicación esquemática de las condiciones de contorno [34].



En lo que se refiere a la adquisición de datos, Nooru-Mohamed desarrolla su propia metodología utilizando para ello LVDT (Transformador Diferencial de Variación Lineal), pequeños transformadores eléctricos para la medición de desplazamientos lineales, los cuales se encuentran colocados en las probetas en las posiciones mostradas en la figura 43.

Por último, los resultados obtenidos por Nooru en sus tests revelaron que, para los ensayos en los que se aplicaba primeramente una carga cortante compresiva y posteriormente una carga de tracción axial, la capacidad axial de las probetas de hormigón se reducía significativamente con la presencia de mayores esfuerzos cortantes compresivos.

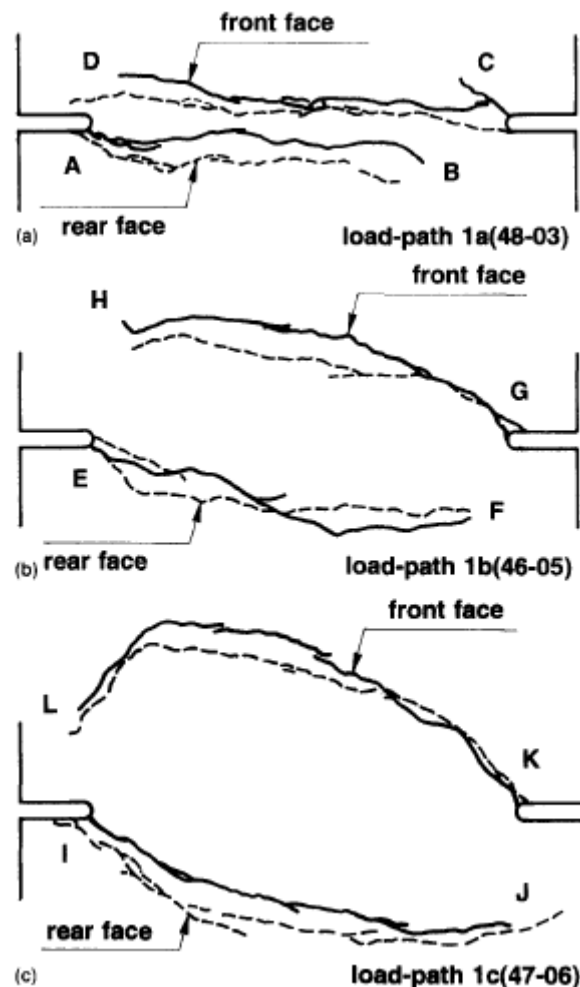


Figura 44: Patrones de propagación de grietas para los diferentes esfuerzos cortantes compresivos [34].

En la figura 44 se puede observar que cuanto mayor son los esfuerzos cortantes compresivos aplicados primeramente (c), el efecto producido por la carga de tracción aplicada posteriormente, se vuelve menos significativo y por tanto, la propagación de la fisura adquiere una mayor curvatura. También se observó que el tamaño de las diferentes probetas ensayadas no influía en el modo de rotura, al menos para el rango de probetas estudiado.

Para los ensayos realizados con cargas axil y cortante proporcionales entre sí, donde ambas eran aplicadas simultáneamente, se dieron diferentes casos de modos de fallo.

Para las probetas de 200 milímetros, se obtuvo una superposición de grietas rectas mientras que para las probetas de 50 milímetros tuvo lugar un crecimiento de una red de grietas inclinadas distribuidas a lo largo de la probeta.

En la figura 45 se pueden observar dichas diferencias entre los dos casos. A la izquierda de la imagen, una probeta de 200 milímetros y a la derecha, una probeta de 50 milímetros.

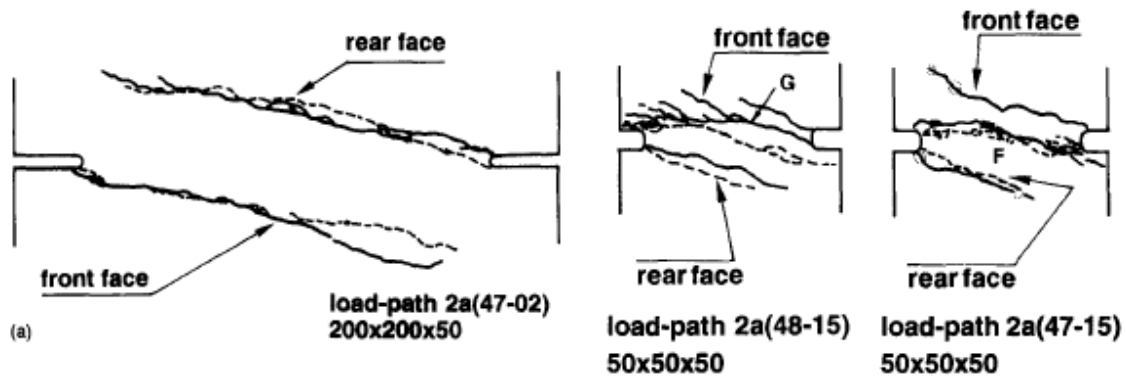


Figura 45: Distintos modos de fallo según el tamaño de la probeta [34].

Para las probetas de longitud 100 milímetros (figura 46), se obtuvo un modo de fallo compartiendo las particularidades de los casos de 200 y 50 milímetros.

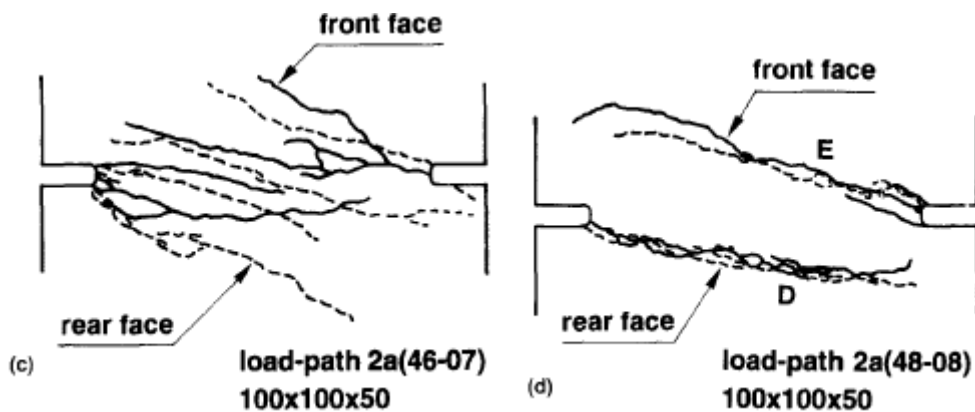


Figura 46: Modo de fallo para probetas con longitud correspondiente a 100 milímetros [34].

En resumen, para los ensayos en los que la carga axil y cortante eran aplicadas de forma simultánea, la longitud de la probeta afectaba de manera considerable a los resultados obtenidos, mientras que para los casos en los que se aplicaba primero la carga cortante y posteriormente la carga de tracción axil, no cobraba tanta importancia el tamaño de la probeta, pero sí la magnitud de la carga cortante que se le aplicase primeramente, ya que cuanto más elevada fuese ésta, menos influía la carga de tracción axil posterior aplicada y por tanto, la trayectoria de la fisura obtenida era más curva.

Otro artículo en la misma línea que el desarrollado por Nooru-Mohamed es el de Jian-Ying Wu y Shi-Lang Xu [36]. El material de las probetas es el mismo, hormigón, pero a diferencia del artículo de Nooru-Mohamed, proponen un sistema de aplicación de cargas en la probeta más parecido al estudio que se quiere realizar numéricamente en el presente trabajo para su posterior comparación.

En su experimento, Jian-Ying Wu y Shi-Lang Xu someten a la probeta a una carga cortante que a continuación, mantienen constante mientras aplican simultáneamente una carga axial de tracción.

En la figura 47 se puede observar cómo afecta la magnitud de la carga cortante aplicada en su modelo numérico, obteniéndose una propagación de fisura más curva cuanto más se asemejase el valor de la carga cortante, al valor de la carga axial de tracción aplicada (b).

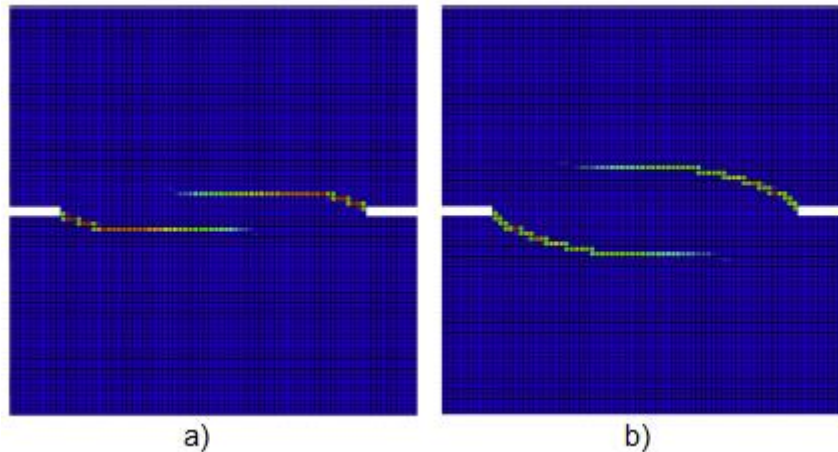


Figura 47: Afectación del valor de la carga cortante aplicada en las probetas para a) 5 kN y b) 10 kN [36].

En la figura 48 se muestra la trayectoria de la propagación de la fisura de forma experimental que obtuvieron tras la realización de sus ensayos. Cabe destacar que los resultados experimentales se asemejan cualitativamente bastante a los resultados que obtuvieron numéricamente.

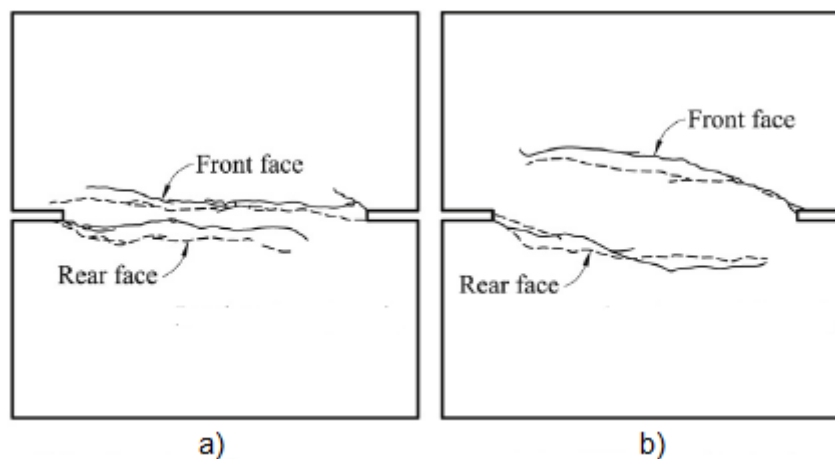


Figura 48: Propagación experimental de la fisura con diferentes cargas cortante aplicadas. a) 5 kN y b) 10 kN [36].

En conclusión, cuanto más cercano fuese el valor de la carga cortante al valor de la carga axial de tracción aplicada, mayor curvatura adquiría la fisura al propagar ya que la probeta estaría sometida a una mayor influencia del modo mixto. Si por el contrario, la diferencia entre los valores de las cargas era significativa, la probeta se veía más afectada por la carga axial de tracción y esto le producía un modo de fractura más próximo al modo I, por lo que la fisura propagaba de forma rectilínea.

### 5.3 Modelo numérico

En este apartado se ha procedido a explicar la realización del modelo numérico en Abaqus. Para dicha realización, se han seguido los mismos pasos que en el apartado 4.3 del presente trabajo pero con algunas diferencias que son comentadas a continuación.

En primer lugar, existe un cambio en cuanto a la geometría de la probeta. Han sido creadas 2 partes por separado, de la misma manera que para el primer modelo, pero esta vez las dimensiones de ambas son distintas.

La probeta tiene unas dimensiones de 270x100x30 mm y las fisuras de 15 mm de longitud con un ancho de 40 mm. En la figura 49 se muestra una imagen con las dimensiones de la probeta.

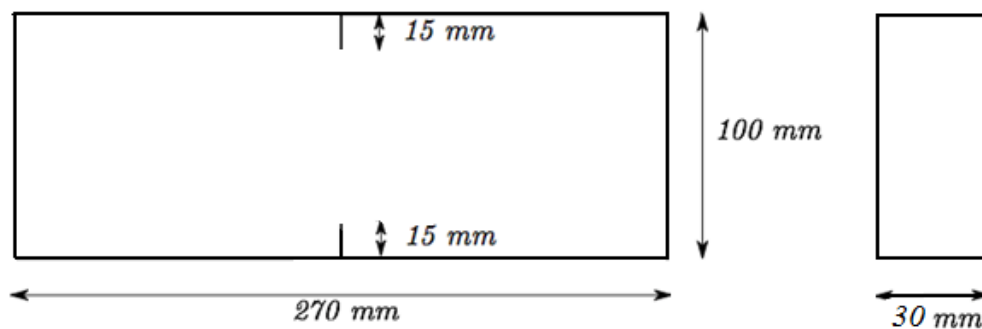


Figura 49: Dimensiones de la probeta y la fisura.

En la figura 50 se muestran ambas partes ensambladas y su disposición final.

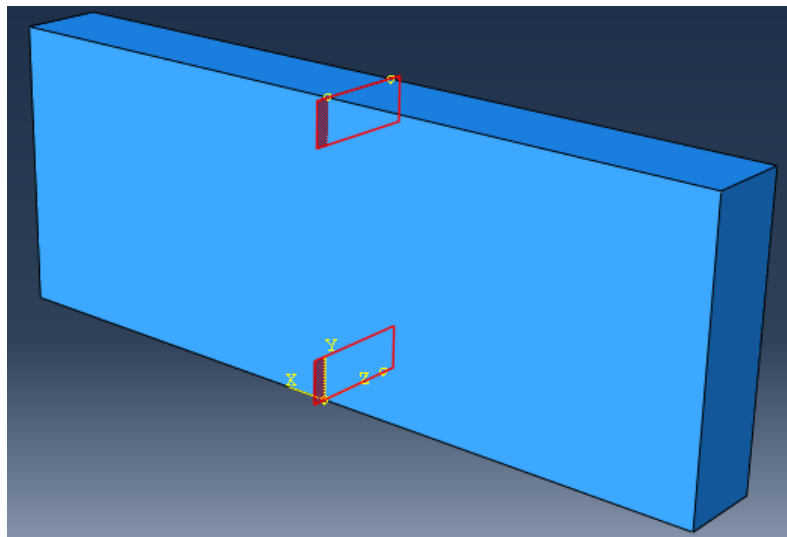


Figura 50: Probeta y fisura ensambladas. Disposición final.

Como se puede apreciar en la figura 50, las fisuras han sido creadas de nuevo con un ancho mayor que el de la probeta por la misma razón explicada anteriormente.

En cuanto al material, se vuelve a aplicar exclusivamente a la probeta y las propiedades de éste son las validadas para el anterior modelo. En cuanto a la energía de fractura, la evolución del daño y la tensión máxima de rotura del material, se mantienen invariables también para este caso.

Para implementar el XFEM en el modelo se procede del mismo modo que en el apartado 4.2, con la salvedad de que ahora la probeta alberga dos entallas y por tanto, se han de seleccionar ambas placas para que actúen como fisuras y los nodos de los elementos contiguos a éstas queden enriquecidos con las funciones propias de enriquecimiento.

El procedimiento para la creación de las cargas es el mismo que el utilizado para el anterior modelo, lo único que cambia es la disposición y el valor de éstas. Para este caso, se trata de 4 condiciones de contorno del tipo velocidad situadas en las direcciones mostradas en la figura 51. El valor de dichas velocidades es de 0,01 m/s.

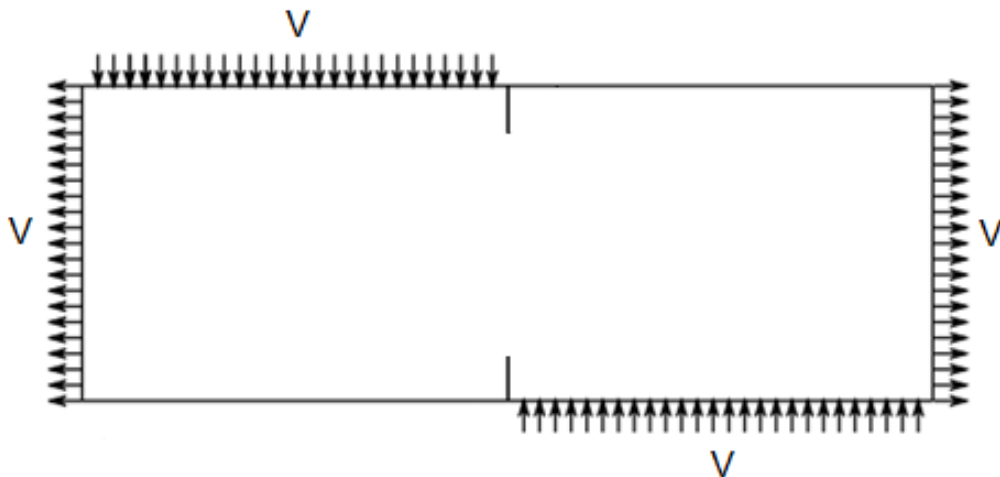


Figura 51: Disposición de las velocidades de desplazamiento.

En la figura 52 se muestra en Abaqus la aplicación de dichas velocidades. Como se puede observar, se encuentran aplicadas en toda la superficie disponible. Las dos velocidades aplicadas en los laterales hacen traccionar la probeta y esto crea un modo I de fractura en la fisura, mientras que las velocidades aplicadas en la zona superior e inferior de la probeta, crean una fuerza de cizalladura que producen un modo II de fractura en la fisura. Todas las velocidades aplicadas simultáneamente provocan el llamado modo mixto de fractura.

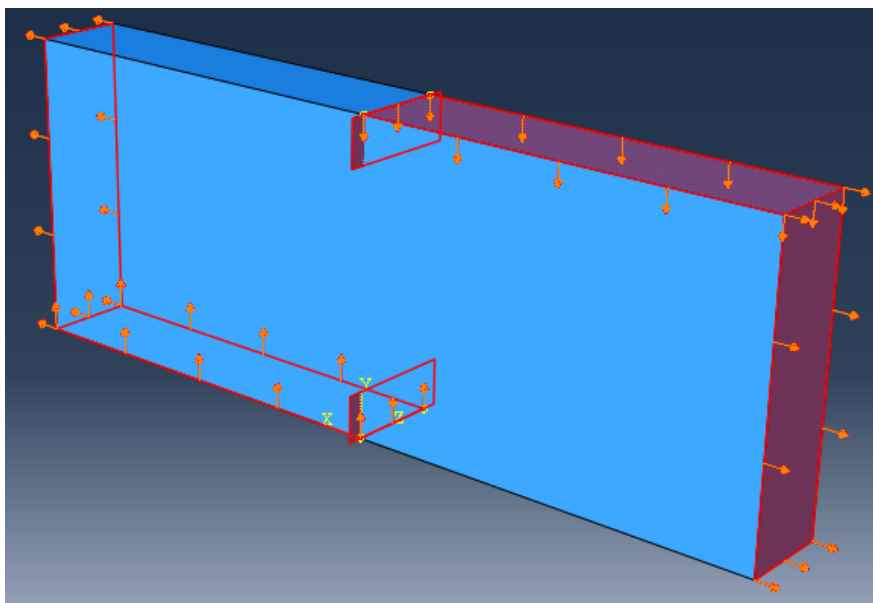


Figura 52: Aplicación de las velocidades en Abaqus.

En cuanto a la creación del Step, se mantienen invariantes las características para este modelo. Continúa siendo un Step del tipo “Dynamic Implicit”, se debe marcar la opción de Nlgeom y se puede considerar un proceso cuasi estático dado que las deformaciones son pequeñas. Todas las cargas serán aplicadas en este Step de forma simultánea.

La malla del modelo ha sido confeccionada de la misma manera que en apartado 4.2, utilizando para ello la opción “Bias” para una mejor aproximación de los elementos en los puntos clave de la probeta. En la imagen 53 se muestra el mallado de la probeta.

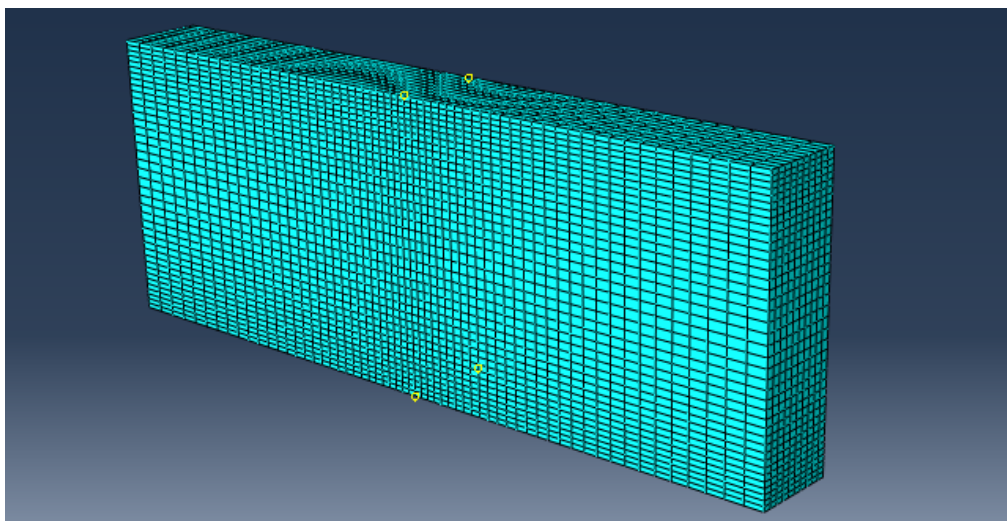


Figura 53: Mallado final de la probeta.

## 5.4 Comparación de resultados

Una vez mostrados los resultados que obtuvieron Nooru-Mohamed [34] y Jian-Ying Wu y Shi-Lang Xu [36] en sus ensayos experimentales, y explicada la realización del modelo numérico en Abaqus, se ha llevado a cabo una comparación cualitativa entre los resultados numéricos y experimentales con la finalidad de validar dicho modelo numérico.

Como se ha visto anteriormente, para el ensayo de flexión en 3 puntos (modo I de fractura), la fisura estaba colocada en el centro de la probeta y por tanto, se podía intuir que ésta propagaría de forma recta por la disposición de cargas y las condiciones de contorno del ensayo. En los artículos estudiados en el apartado 5.2, al tratarse de experimentos con modos de fractura mixtos y no estar establecidas del todo las condiciones de contorno, no se podía intuir tan fácilmente el camino de propagación que pudiese adquirir la fisura.

Tras la simulación numérica, se han obtenido unas direcciones de propagación de fisura similares a lo que otros autores como Jian-Ying Wu y Shi-Lang Xu habían obtenido en sus ensayos. Tanto la fisura superior como la inferior, han propagado de forma curva alcanzando una longitud similar ambas. En la figura 54 se puede observar el resultado obtenido en Abaqus una vez finalizada la simulación numérica.



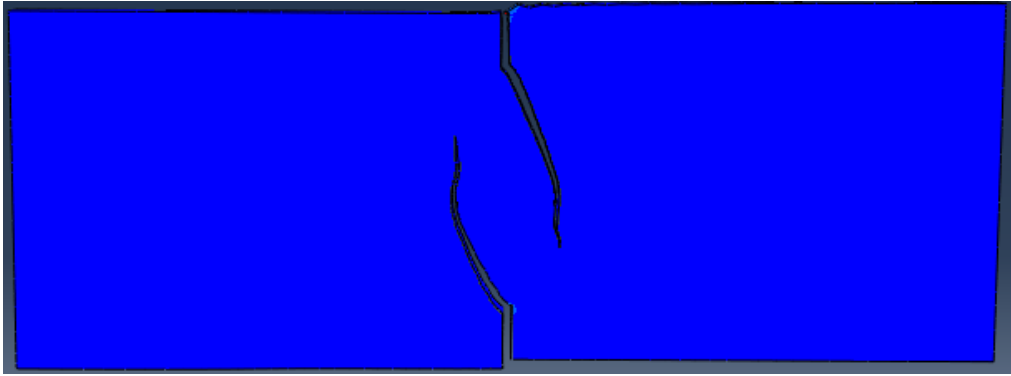


Figura 54: Probeta de PMMA fisurada tras la simulación del test de Nooru-Mohamed.

En la figura 55 se puede apreciar como los resultados numéricos (a), son bastante parecidos a los obtenidos numéricamente (b) y experimentalmente (c) por Jian-Ying Wu y Shi-Lang Xu [36].

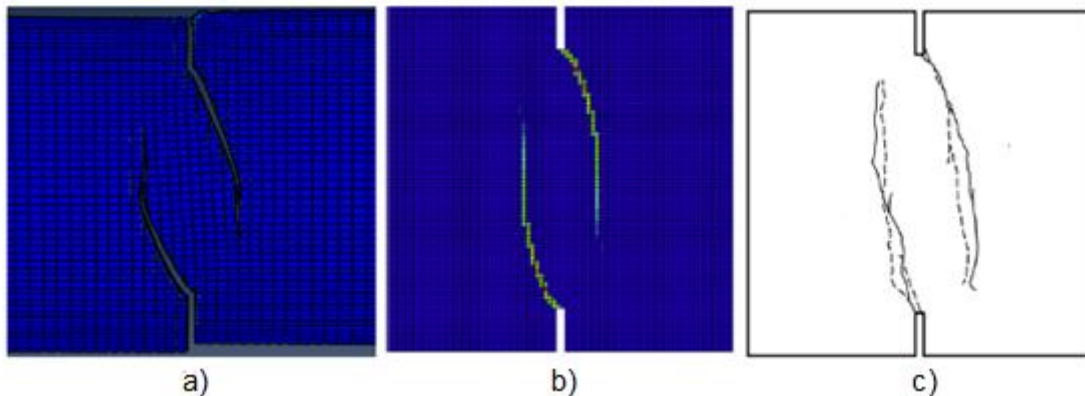


Figura 55: Comparación cualitativa de los resultados obtenidos. a) obtenido mediante Abaqus, b) obtenido numéricamente por Jian-Ying Wu y Shi-Lang Xu [36] y c) obtenido experimentalmente por Jian-Ying Wu y Shi-Lang Xu [36].

Se ha de recordar que los experimentos llevados a cabo por los autores de los artículos del apartado 5.2 han sido realizados con probetas de hormigón. Las probetas utilizadas en el estudio del presente trabajo son de PMMA, por tanto, las pequeñas diferencias observadas en cuanto a la propagación de las fisuras pueden ser debidas a las diferencias entre las propiedades mecánicas de los distintos materiales empleados.

No se han podido comparar los resultados con los de otros artículos en los que se emplease el PMMA como material, ya que no se han encontrado en la bibliografía estudios en los que realizara experimentalmente este tipo de ensayo en PMMA.

A la vista de los resultados, se verifica que el modelo numérico se adapta en forma a los resultados obtenidos experimentalmente por los otros autores ya citados en los apartados anteriores. Ambas fisuras han propagado simultáneamente adquiriendo formas parecidas entre ellas y prácticamente idénticas a las de los ensayos experimentales.

Como resumen de todo lo anterior expuesto, se puede decir que el modelo numérico desarrollado para la simulación del modo de fractura mixto, es válido de forma cualitativa. Además, se verifica que los parámetros del PMMA establecidos en el primer modelo numérico realizado (ensayo de flexión en 3 puntos), son válidos también para este modelo.

# CAPÍTULO VI

## CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

### 6.1 Conclusiones

En este capítulo se recogen las conclusiones generales que derivan del desarrollo del presente Trabajo de Fin de Grado.

En el presente documento se han descrito las bases de uno de los diferentes métodos numéricos que existen para poder llevar a cabo los análisis de propagación de fisuras. Dicho método es conocido como Método de los Elementos Finitos Extendidos (XFEM). Además, se ha puesto en práctica mediante la simulación de propagación de fisuras en condiciones cuasiestáticas, en el código comercial de elementos finitos Abaqus.

A continuación se muestran las principales conclusiones que se han extraído del presente trabajo:

- En este tipo de método, la precisión en los resultados depende directamente de la calidad de la malla. Se ha de refinar mucho en el frente de fisura para conseguir reproducir con buena precisión la singularidad existente y obtener de este modo, buenos resultados. Pero este refinamiento de la malla conlleva un incremento del coste computacional, por tanto se ha de buscar un punto de equilibrio entre obtener buenos resultados y el coste computacional.
- La principal ventaja del método de los elementos finitos extendidos (XFEM) es que utiliza una única malla sin la necesidad de un remallado posterior tras la propagación de la fisura, esto se traduce en un gran ahorro de coste computacional. Además, esta malla se extiende a todo dominio geométrico, puede ser poco refinada, y no necesita ser estructurada, es decir, no tiene por qué adaptarse a la geometría de la fisura.
- En el XFEM, la fisura actúa como una unidad geométrica totalmente independiente y su interacción con la malla se realiza a través del enriquecimiento de los nodos intersectados por la ubicación geométrica de la propia fisura. La estrategia en la que se basa el XFEM es en el enriquecimiento a nivel local de la aproximación polinómica (funciones de forma nodales) de manera que se puede modelar el gradiente de tensiones del frente de fisura independientemente de la malla.
- Se ha logrado simular con éxito modelos numéricos tridimensionales, diferenciándose de este modo de la mayoría de los estudios comúnmente realizados (2 dimensiones). Además, se ha conseguido que la fisura propague en dichos modelos 3D, sin la necesidad de predefinir un camino de propagación previo a la simulación.



- Se ha conseguido reproducir numéricamente con buena precisión el ensayo de flexión en 3 puntos. Dicho modelo numérico se adapta en mayor medida a los datos experimentales cuanto mayor son las velocidades de propagación de la fisura, y esto ocurre si la longitud de fisura inicial es pequeña.
- Se ha logrado validar cualitativamente el modelo numérico desarrollado para la simulación del modo mixto de fractura. Además, se ha verificado que los parámetros del PMMA establecidos para el primer modelo, son válidos de igual manera para éste.

## 6.2 Trabajos futuros

Entre los posibles desarrollos y trabajos futuros relacionados con esta línea de investigación desarrollada en el presente trabajo, se encuentran los siguientes estudios realizables:

- Variación de la disposición de las cargas en el ensayo de flexión en tres puntos. Este cambio haría propagar a la fisura con otro modo distinto de fractura y se obtendrían nuevos resultados con los que comparar.
- Variación del espesor de la probeta. Para la obtención de la tenacidad de fractura de un material intervienen varios parámetros, entre ellos el espesor de la probeta, obteniéndose una mayor tenacidad de fractura cuanto menor sea éste. Sería óptimo trabajar con espesores mayores en las simulaciones numéricas, para asegurarse que el valor de la tenacidad de fractura del PMMA es el obtenido en los ensayos experimentales. Siempre teniendo en cuenta que el añadir más espesor conlleva un aumento del coste computacional debido a la adición de más elementos en la malla.
- Variación de la posición inicial de la fisura con el fin de lograr cierta excentricidad. Con este cambio se podría estudiar los diferentes caminos de propagación que tomaría la fisura para los diversos casos de velocidad de desplazamientos existentes en el ensayo de flexión en tres puntos.
- Realización de simulaciones numéricas en las que no exista ninguna fisura inicial y que ésta comience a propagar en el punto en el que antes se alcance la tensión de rotura.
- Llevar a cabo una comparación cuantitativa de los resultados obtenidos en el modelo numérico para el ensayo en modo mixto de fractura, con los obtenidos experimentalmente con probetas de PMMA.
- Comparación entre resultados obtenidos mediante XFEM y los obtenidos mediante otras metodologías numéricas como pueda ser, los elementos cohesivos, donde a diferencia de los XFEM, se hace necesario predefinir un camino de propagación de fisura y la fisura comienza a propagar cuando el esfuerzo principal mayor alcanza la resistencia a tracción en el frente de fisura.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] <http://www.monstersandcritics.de> (visitada el 10/06/2014).
- [2] Griffith, A.A. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A.*, 221:163–197 (1921).
- [3] José Luis Arana, Javier Jesús González. Mecánica de la Fractura. Servicio editorial de la Universidad del País Vasco. ISBN: 84-8373-455-9. Depósito legal: BI - 2.150-02 (2002).
- [4] José Luis Pérez Castellanos, Jorge Zahr Viñuela. El método de los elementos finitos. Master en Mecánica Estructural Avanzada (2011-2012).
- [5] Gallagher, R.H. A review of finite element techniques in fracture mechanics. *In Proceedings of the 1st International Conference on Numerical Methods in Fracture Mechanics*, Luxmoore, A.R., Owen, D.R.J. (eds). Pineridge: Swansea, 1-25 (1978).
- [6] Fawkes, A.J., Owen, D.R.J., Luxmoore, A.R. An assessment of crack tip singularity models for use with isoparametric elements. *Engrg. Fracture Mech.*, 11: 143-159 (1979).
- [7] Owen, D.R.J. y Fawkes, A.J. *Engineering Fracture Mechanics: Numerical Methods and Applications*. Pineridge: Swansea (1983).
- [8] Liebowitz, H., Moyer, ET. *Finite element methods in fracture mechanics. Computers and Structures*, 31: 1-9 (1989).
- [9] Liebowitz, H., Sandhu, J.S., Lee, J.D. y Menandro, F.C.M. Computational fracture mechanics research and application. *Fracture: A Topical Encyclopedia of Current Knowledge*, Cherepanov, G.P. (ed.). Malabar, Krieger: FL, 512-525 (1998).
- [10] Melenk, J.M. y Babuška, I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1- 4):289–314 (1996).
- [11] Belytschko, T. y Black, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5):601– 620 (1999).
- [12] Moës, N., Dolbow, J. y Belytschko, T. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1):131–150 (1999).
- [13] Daux, C., Moës, N., Dolbow, J., Sukumar, N. y Belytschko, T. Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *Int. J. Numer. Method Engrg.*, 48: 1741-1760 (2000).
- [14] Sukumar, N., Moës, N., Moran, B. y Belytschko, T. Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48 (11):1549–1570 (2000).

- [15] Dolbow, J., Moës, N. y Belytschko, T. An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(51-52):6825–6846 (2001).
- [16] Strouboulis, T., Babuška, I. y Copps, K. The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181: 43-69 (2000).
- [17] Strouboulis, T., Copps, K. y Babuška, I. The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance. *Int. J. Numer. Method Engrg.*; 47: 1401-1417 (2000).
- [18] Strouboulis, T., Copps, K. y Babuška, I. The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190: 4081- 4193 (2001).
- [19] Duarte, C.A., Babuška, I. y Oden, J.T., Generalized finite element methods for three dimensional structural mechanics problems. *Comput. Struct.*, 77: 215-232 (2000).
- [20] Stolarska, M., Chopp, D.L., Moës, N. y Belytschko, T. Modelling crack growth by level sets and the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51(8):943–960 (2001).
- [21] Tesis doctoral realizada por D. Octavio Andrés González Estrada. Estimación y acotación del error de discretización en el modelado de fisuras mediante el método extendido de los elementos finitos (2010).
- [22] Laborde, P., Pommier, J., Renard, Y. y Salaün, M. High-order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(3):354–381 (2005).
- [23] Elguedj, T., Gravouil, A. y Combescure, A. Appropriate extended functions for XFEM simulation of plastic fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(7-8):501–515 (2006).
- [24] Dolbow, J.E. *An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics*. Tesis doctoral, Northwestern University (1999).
- [25] Strang, G. y Fix, G. *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ (1973).
- [26] Béchet, E., Minnebo, H., Moës, N. y Burgardt, B. Improved implementation and robustness study of the XFEM method for stress analysis around cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(8):1033–1056 (2005).
- [27] Ventura, G., Xu, J.X. y Belytschko, T. A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by EFG. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54(6):923–944 (2002).
- [28] Moës, N. y Belytschko, T. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(7):813–833 (2002).
- [29] Gravouil, A., Belytschko, T. y Moës, N. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part II: Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(11):2569–2586 (2002).

- [30] J.A. Loya. E.I. Villa, J. Fernández-Sáez. Crack-front propagation during three-point-bending tests of polymethyl-methacrylate beams (2009).
- [31] F. Zhou, J.F. Molinari, T.Shioya, A rate-dependent cohesive model for simulating dynamic drac propagation in brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics* 72 1383-1410 (2005).
- [32] Hibbitt Karlsson & Sorensen Inc Abaqus User's Manual 6.10-1; Hibbit, Karlsson & Sorensen Inc: Pawtucket, RI, USA (2010).
- [33] Gómez Sánchez, F. Javier. Tesis doctoral: Un criterio de rotura en sólidos entallados (1997).
- [34] Experimental and Numerical Study on the Behavior of Concrete Subjected to Biaxial Tension and Shear. M.B. Nooru-Mohamed, Erik Schlangen, and Jan G.M. van Mier Stevin Laboratory, Faculty of Civil Engineering, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands (1993).
- [35] A 6 dof testing machine controlled by digital image correlation: An experimental setup for new Nooru-Mohamed test. M. Poncelet, J. Le Flohic, V. Parpoil, H. Leclerc, B. Raka and J.-M. Virely (2010).
- [36] Jian-Ying Wu, Shi-Lang Xu. An augmented multicrack elastoplastic damage model for tensile cracking (2011).
- [37] Nooru-Mohamed, M.B. Mixed-Mode Fracture of Concrete: An Experimental Approach; Ph.D. Thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands (1992).